

VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Papírové modely

Paper models

Zadání bakalářské práce

Student: **Kateřina Polochová**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103R031 Výpočetní matematika

Téma: **Papírové modely**
Paper models

Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

Tvorba papírových vystřihovánek má v českých zemích dlouhou tradici. V 70. a 80. letech minulého století vycházely v časopise ABC papírové vystřihovánky, jejichž autorem je ing. arch. Richard Vyškovský. Jeho vystřihovánky se staly fenoménem zejména pro jejich precizní a pečlivé a často funkční provedení.

Cílem této bakalářské práce je rozbor matematických postupů, které se při tvorbě modelů využijí; zejména s ohledem na rozvinutí povrchu reálného objektu sestaveného z ploch do sítě, respektive do papírového modelu (sít' včetně ohybových čar a chlopní).

Práci je možno rozdělit do několika kroků, například:

- * matematická formulace řešeného problému,
- * přehled známých problémů a možných řešení,
- * analýza "co je a co není možné" slepit z papíru,
- * porovnání vhodnosti různých rozvinutí stejného objektu.

Dále by bakalářská práce měla směřovat k popisu algoritmu, který by za jistých pečlivě formulovaných podmínek, uměl 3D objekt rozvinout do papírového modelu. Taková úloha je však v obecnosti velmi obtížná. Práce se proto zaměří zejména na dílčí kroky algoritmického postupu, které bude možno rozebrat s využitím teorie grafů. Případnou částí práce budou i modely či jejich části demonstrující konkrétní aspekty řešení problému.

Seznam doporučené odborné literatury:

- * P. Kašpar, Tvorba vlastní vystřihovánky, Elektronická skripta ČVUT, link <http://15122.fa.cvut.cz/?page=cz,elektronicka-skripta> (7.2.2018)
- * T. Chromčák, Programy pro tvorbu papírových vystřihovánek, bakalářská práce, Univerzita Tomáše Bati, 2011
- * další literatura dle pokynů vedoucího

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

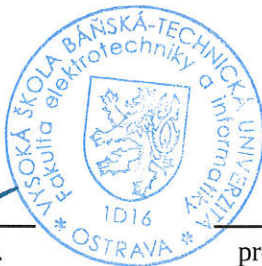
Vedoucí bakalářské práce: **doc. Mgr. Petr Kovář, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2018

Datum odevzdání: 30.04.2019



prof. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. Ing. Pavel Brandštetter, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně. Uvedla jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpala.

V Ostravě 26. dubna 2019


.....

Souhlasím se zveřejněním této bakalářské práce dle požadavků čl. 26, odst. 9 Studijního a zkušebního řádu pro studium v bakalářských programech VŠB-TU Ostrava.

V Ostravě 26. dubna 2019

Polochoz!
.....

Děkuji svému vedoucímu práce doc. Mgr. Petru Kovářovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné podněty, inspiraci a připomínky v průběhu zpracování práce.

Dále bych chtěla poděkovat rodině a partnerovi za psychickou a morální podporu během celého studia.

Abstrakt

Papírové modely a vystřihovánky jsou na světě již dlouho a jsou užitečné pro vývoj představivosti. Tato práce se zaměřuje na modely z hlediska matematiky a na vznik sítí těchto modelů. Hlavním cílem práce je rozložit těleso (mnohostěn) na jeho síť a popsat matematické postupy, kterými toho lze dosáhnout.

Předpokládáme, že máme popsané těleso, které máme v plánu rozložit. Nejprve zkontrolujeme, zda stěny tělesa jsou skutečně stěny, než budeme pokračovat dále. Dále zjistíme, které stěny spolu sousedí. Pak sestavíme graf sítě tělesa a nakonec samotné těleso rozložíme roviny. Výstupem celého procesu je síť tělesa.

V práci se často setkáme s teorií grafů, hlavně při rozkladu tělesa na jeho síť. To proto, že jednotlivé stěny tělesa lze aproximovat vrcholy grafu a hrany grafu odpovídají hranám tělesa, které spolu sousedí. Druhým základním nástrojem jsou početní postupy analytické geometrie, se kterými se setkáváme hlavně při otáčení stěn do jedné společné roviny.

Klíčová slova: papírové modely, síť tělesa, barycentrické souřadnice

Abstract

Paper models and cut-outs have been in our world for a long time and they are useful for the development of imagination. This thesis focuses on mathematics in models and on making nets (unfolded polyhedrons) of these models. The main part of this thesis describes how to decompose an object (a surface of a polyhedron) to its net and to describe mathematical procedures which enable us to do so.

Suppose we have a body which we plan to decompose. Firstly, we check whether the faces of the body are really faces. Then we find out which faces are adjacent. Finally, we make a graph of the net of the body and decompose the body to a plane drawing.

In the thesis, graph theory is mentioned often. This is due to the fact that individual body faces can be represented by graph vertices and graph edges correspond to the body edges the faces share. The second basic is analytical geometry, which is needed when rotating the faces into one plane.

Key Words: Paper models, decompose an object to its net, Barycentric Coordinates

Obsah

Seznam obrázků	7
1 Úvod	9
1.1 Historie papírových modelů	9
1.2 O terminologii a souřadnicích	10
1.3 Tvorba vlastní vystřihovanky zaběhlými postupy	12
1.4 Softwarové vybavení pro tvorby papírových modelů	13
2 Určení umístění bodu v prostoru	14
2.1 Rozbor pro výsledná p	15
3 Uložení stěny tělesa	25
3.1 Vnitřní vrcholy stěny	25
4 Rozpoznání sousedních stěn	27
4.1 Kód pro rozpoznání sousednosti stěn	27
5 Rozložení tělesa na síť	30
5.1 Postup sestavení grafu S	30
5.2 Příklad rozkladu seříznutého čtyřstěnu na síť	31
5.3 Tělesa nerozložitelná do roviny	34
6 Otáčení stěn tělesa do roviny námi zvolené stěny tělesa	37
6.1 Výpočet normály stěny	37
6.2 Výpočet odchylky dvou normál	38
6.3 Sestavení matice otočení	38
7 Zálepky	46
8 Srovnávací kritérium různých sítí	47
9 Rozbor krychle s kvádrovým výřezem	48
9.1 Kontrola stěn	48
9.2 Rozpoznání sousednosti stěn	50
9.3 Sestavení grafu sítě	50
9.4 Rozložení tělesa na síť	61
10 Závěr	69
Literatura	71

Seznam obrázků

1	Papírový model	11
2	Papírová vystřihovánka	11
3	Trojúhelník ABC	16
4	Čtyřstěn ABCD	20
5	„Zub“ ve stěně	29
6	Duální graf sousedních stěn v tělese	29
7	Seríznutý čtyřstěn	31
8	Zvolený vrchol S1	32
9	Vložení hrany AB mezi vrcholy S1 a S2	32
10	Vložení hrany BC mezi vrcholy S1 a S3	33
11	Vložení hrany CA mezi vrcholy S1 a S4	33
12	Vložení hrany EF mezi vrcholy S2 a S5	34
13	Kostel svatého Mikuláše, autor fotografie: Michal Kmínek	35
14	Chladicí věže, autor fotografie: Japo	36
15	Přední kapota z modelu škoda 120, autor fotografie: 2BeerOrNot, autor modelu: R. Vyškovský	36
16	Otočení stěny 2 do kořenové roviny	42
17	Otočení stěny 5 do kořenové roviny	43
18	Otočení stěny 3 do kořenové roviny	44
19	Otočení stěny 4 do kořenové roviny	44
20	Rozložená síť	45
21	Těleso, které rozkládáme na síť	49
22	Graf sousednosti stěn	51
23	Kořen grafu S1	52
24	Kořen vrcholu S1 a označený vrchol S2	53
25	Vložená hrana AB a označený vrchol S3	54
26	Vložené hrany AB a BC a označený vrchol S4	55
27	Vložené hrany AB, BC, CD a označený vrchol S5	56
28	Vložené hrany AB, BC, CD, DA a označený vrchol S6	57
29	Vložené hrany AB až EF a označený vrchol S3	58
30	Kompletní komponenta grafu sítě a nově označený kořen S7	59
31	Kompletní komponenta grafu sítě a vložená hrana OL a označený vrchol S10	60
32	Kompletní komponenta grafu sítě a vložená hrana OL, JN a označený vrchol S9	61
33	Kompletní graf sítě	62
34	Sklopená stěna S2 do roviny stěny sA a otočená stěna S6	64
35	Sklopená stěna S6 do roviny sA	65
36	Sklopená stěna S3 do roviny stěny sA	65

37	Sklopená stěna S4 do roviny stěny sA	66
38	Sklopená stěna S5 do roviny stěny sA	66
39	Sklopená stěna S8 do roviny stěny sB	67
40	Sklopená stěna S9 do roviny stěny sB	67
41	Sklopená stěna S10 do roviny stěny sB	68
42	Rozložená síť tělesa	68

1 Úvod

1.1 Historie papírových modelů

Historie papírových modelů sahá do 15. století, kdy se zdokonalil a rozšířil tisk obrázků. Ve Štrasburku v 18. století tiskař Seyfried vytiskl několik archů papíru s figurkami vojáků. Vystřihovánky se rozšířily mezi lidmi díky zakazu stavět betlémy v kostelech. Proto si lidé začali skládat modely betlémů doma.

Vojáčky a betlémy však nebyly jedinými vystřihovánkami, které se tiskly. Ve Velké Británii a v Německu se mezi dětmi rozšířily papírové panenky, které byly cenově velmi dostupnou hračkou. Papírové modely neměly sloužit pouze jako hračky pro děti, ale například i jako pracovní pomůcka pro stavitele a architekty, pro které v roce 1802 vyšla kniha, zabývající se konstrukcí a sestavováním papírových staveb.

V pozdějších dobách se začaly objevovat papírové vystřihovánky na stránkách různých časopisů, např. časopis ABC, jehož první číslo vyšlo v lednu 1957. Jak se můžeme dočíst v článku [1]. Mezi nejvýznamnější autory papírových vystřihovánek, jehož modely vycházely v časopise ABC, patří architekt Ing. Richard Vyškovský.

1.1.1 Jeden z nejznámějších modelářů

Sítě papírových vystřihovánek můžou být samy o sobě mistrovským dílem, pokud jsou správně rozloženy na papíru. Už samotná rozložená síť musí modeláře zaujmout tak, aby měl chuť model slepit, ale důležitým parametrem pro tisk je také úspora materiálu. Sítě modelů, které vznikly rukou Ing. Richarda Vyškovského, byly modelářsky velmi přitažlivé, jak množstvím černých linek tak i červenými střechami a zelenou trávou. Byl z nich cítit optimismus a vytvářely radost.

Ing. Vyškovský všechny své vystřihovánky rýsoval ručně a ke svým kresbám přidával také návodné kresby, které lákaly k samotnému slepení modelů. Jeho dílo není primitivní, ale ani příliš složité pro malého modeláře, který chce slepit svou hračku nebo výzdobu do pokoje.

Samozřejmě jako každý člověk, tak i Ing. Vyškovský dělal chyby ve svých vystřihovánkách. Ty se pohybovaly od špatně označených dílů, přes více různých měřítek v jednom modelu až po případy, kdy byla chyba na straně nekvalitních podkladů pro vystřihovánky.

Richard Vyškovský však není jediným tvůrcem vystřihovánek. Mezi moderní autory patří například Milan Bartoš a nebo nakladatelství BETEXA. Více o Ing. Vyškovském se můžeme dočíst v článku Fenomén Vyškovský [2].

V dnešní době se Ing. Vyškovský zaměřuje hlavně na zříceniny a vytváří jejich původní podoby, aby se zachovaly alespoň v papírové podobě. Vybírá si především hrady, které mají příběh. Jak sám uvádí v rozhovoru, sestavení jedné vystřihovánky se nedá časově stanovit, protože musí nastudovat všechny nákresy a celou vystřihovánku zkonstruovat. I v dnešní době totiž všechny své vystřihovánky vytváří ručně, aby hradům zůstalo jejich kouzlo nedokonalosti, kterou počítá díky své dokonalosti, přesnosti a nejrůznějšího softwarového vybavení nedokáže nasimulovat.

Pro samotnou konstrukci Vyškovskému stačí pouze fotografie a na místo originální stavby vyráží jen tehdy, kdy je originál stavby nějakým způsobem složitější pro konstrukci. Ve svých mladších letech však na dané lokace sám cestoval i se svou rodinou a kreslil skicy vybraných staveb.

V tomto rozhovoru se také můžeme dočíst o tom, že sám sebe nepovažuje za modeláře, považuje se spíše za nešiku, protože jak sám říká, neumí tyto vystřihovánky stavět. K tvorbě vystřihovánek se dostal díky sázce s kolegou o tom, že hračky lze vyrobit i z papíru. Díky této sázce vzniklo již 464 vystřihovánek a i přes svůj věk 89 let pracuje na dalších. Jeho vystřihovánky jsou různého zaměření, ale jeden typ modelu odmítl sestavit. Touto vystřihovánkou byla gilotina, kterou po něm chtěli vydavatelé časopisu ABC [4].

1.2 O terminologii a souřadnicích

V této práci se setkáme s papírovými modely (obrázek 1) a vystřihovánkami (obrázek 2). I když na první pohled se zdá, že jde o identickou věc, opak je pravdou. Mezi papírovým modelem a papírovou vystřihovánkou je zásadní rozdíl v tom, že papírové modely nemají zálepky a lepí se k sobě pouze hrany tohoto modelu, zatímco lepit papírové vystřihovánky je jednodušší, protože obsahují zálepky.

V matematice počítáme s úhly v radiánech, ale v souvislosti s papírovými modely a s tělesy se zpravidla používají stupně. Z tohoto důvodu budeme pracovat s úhly ve stupních, jak je u modelů zvykem.

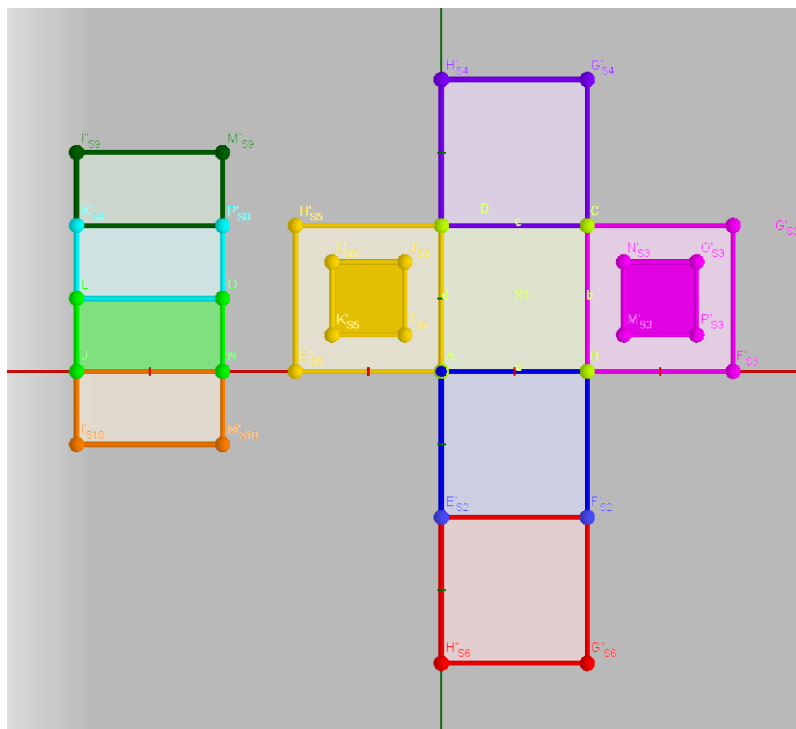
Také se zde setkáme s různými souřadnými systémy, které budou použity v různém kontextu. Pro identifikaci umístění bodu v prostoru použijeme barycentrické souřadnice pro jejich jednoduchost. Barycentrické souřadnice jsou jedny z homogenních souřadnic [11].

Také je v homogenních souřadnicích jednodušší provádět transformace, toho se využívá hlavně v grafice. Již v knize Počítačová grafika z roku 1980 se můžeme dočíst o jejich využití v počítačové grafice [7]. Na rozdíl od kartézského souřadného systému potřebujeme méně matic pro otočení stěny do roviny jiné stěny.

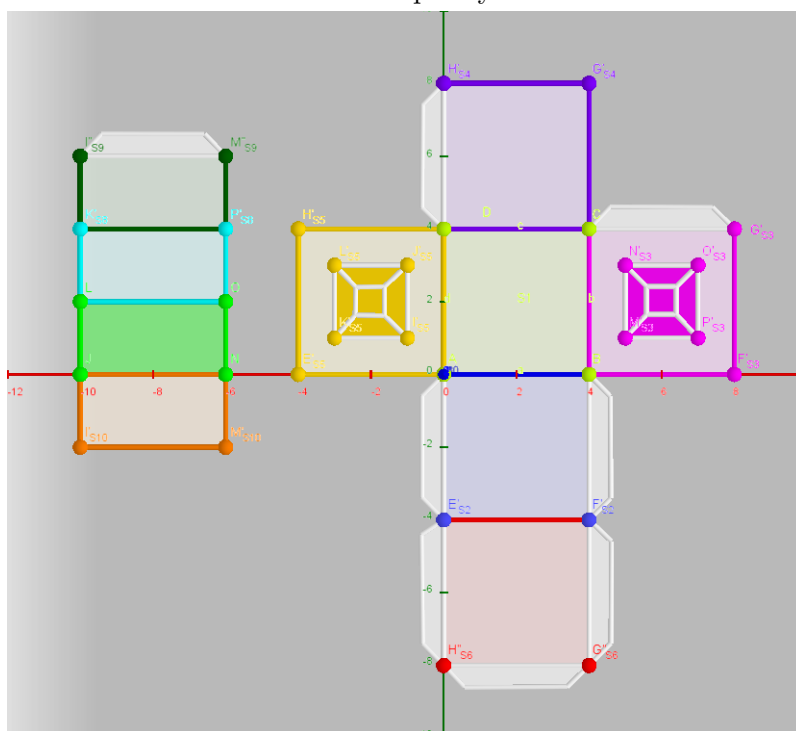
Využití homogenních souřadnic se často používá například u grafiky počítačových her, kdy potřebujeme měnit obrazy tak, aby vytvářely perspektivu. U 3D počítačových her u pohybu hráče potřebujeme, aby se okolní krajina měnila stejným způsobem, jako když se pohybujeme v reálném světě [8].

V matici transformace, kde poslední řádek a poslední sloupec jsou nulové kromě jednoho prvku, který mají tento řádek i sloupec společný. Toto číslo nacházející se v matici transformace, nazvěme ji např. matice A , která je čtvercovou maticí 4×4 pro 3D prostor, na souřadnicích a_{44} . Pokud je a_{44} roven 1, pak se těleso nebo jeho část, které budeme transformovat, velikostně nezmění. Pokud bude $a_{44} < 1$, pak se daný objekt zmenší, pokud bude $a_{44} > 1$, pak se objekt zvětší [9].

Pro převody mezi jednotlivými homogenními souřadnicemi využijeme přepočty přes kartézské souřadnice. Vrcholy tělesa budeme mít vždy v kartézských souřadnicích.



Obrázek 1: Papírový model



Obrázek 2: Papírová vystřihovánka

1.3 Tvorba vlastní vystřihovánky zaběhlými postupy

Při samostatné tvorbě se tedy budeme řídit hlavně prací Ing. Vyškovského, který je autorem některých pravidel (například návodný obrázek lákající modeláře k tomu, aby si model slepil). Budeme přitom vycházet z článku [5]. Postup pro sestavení vystřihovánky v jednotlivých krocích:

1. Jako první a zároveň nejdůležitější bod pro tvorbu modelu je výběr samostatné stavby, kterou budeme tvořit. Získáme k ní podklady, například fotografie, vlastní plánky nebo výkresy ze stavebního úřadu.
2. V dalším kroku zvolíme výsledné měřítko modelu, který chceme sestavovat. Musíme však při tom vzít v úvahu, že modeláři často bývají děti, proto nejmenší možné díly by neměly být menší než 2 mm. Také musíme vzít v úvahu, že velké modely nemusí v konečném důsledku působit esteticky a například BETEXA používá měřítko pro hrady a zámky často 1:200 [10]. Snažíme se zvolit měřítko tak, aby výsledné rozměry byly přibližně 30 cm × 30 cm × 30 cm. Pokud budeme dělat sadu modelů, pak by všechny modely měly být ve stejném měřítku.
3. Při vytváření modelu musíme myslet na určitá pravidla, kterých je dobré se držet. Modelujeme jen to, co chceme, aby bylo součástí výsledného modelu. Zapomeneme i na skryté hrany, které by nefungovaly správně při texturování. v neposlední řadě musíme počítat s problematickými tvary, které do roviny rozvinout neumíme (například kulovitá tělesa) a aproximovat je něčím, co do roviny rozvinout lze. Je také dobré přidat modelu podpůrné pilíře, které nebudou viditelné (budou umístěny uvnitř modelu), ale budou zajišťovat stabilitu modelu. Není špatné přidat i podpůrná žebra, která nebudou viditelná, ale zjednoduší konstrukci a zvýší stabilitu.
4. Dalším krokem je vložení textur na dané těleso. Můžeme použít vlastní fotografie a nebo využít možnosti textur programů, ve kterých model zpracováváme. Druhou možností je předpřipravit si místa zlomů textury. Celý model lze vytvořit bez nich a v konečném kroku je přidat vlastní rukou, aby model získal své nedokonalosti, které jsou nad limity počítačového softwaru. Samozřejmě lze mít model zcela bez textur, ale nebývá to běžná praktika.
5. Nyní těleso rozvineme do roviny a vyrobíme z něj jednotlivé díly modelu.
6. Přidáme chlopně. Alespoň jedna ze dvou hran, které na sebe navazují a budeme je k sobě lepit, musí obsahovat chlopeň. Volba šířky je libovolná, ale obvykle bývá mezi 2 – 7 mm podle velikosti dílu, na kterém se chlopeň nachází. Také musíme chlopeň přizpůsobit k místu, kde bude přilepená. Úhel zkosení hrany bývá $\leq 45^\circ$. Také na chlopeň můžeme přidat texturu, která usnadní modeláři práci (nebudou viditelné nepřesnosti).

7. Nyní uspořádáme díly na papír k tisku tak, aby zabraly co nejméně místa. Každému z dílů přidáme číslo, abychom na něj mohli v návodu odkazovat. Očíslujeme je tak, jak na ně bude postupně narážet modelář při lepení modelu. Vytvoříme pomocné značení, kterým opět ulehčíme modelářům práci. Značky budou sloužit k tomu, aby modelář poznal, na jakou stranu se díl ohne. Kruhem značíme konvexní a trojúhelníčkem konkávní ohyb.
8. Nakonec sepíšeme podrobný návod k lepení modelu a doplníme návodnými obrázky, ze kterých je zřejmé umístění dílů. Určíme obtížnost modelu v rozsahu 1 až 5 a model natiskneme.

1.4 Softwarové vybavení pro tvorby papírových modelů

O papírové modely se ve své bakalářské práci [6] zajímal také Tomáš Chromčák na Univerzitě Tomáše Bati ve Zlíně. Jeho práce se zabývá tvorbou papírových modelů pomocí již dostupného softwarového vybavení, které celé těleso (budovu) samy rozvinou do roviny. Mezi jím použité programy patří například Sketch Up nebo Pepakura Designer, ve kterých je možné namodelovat těleso, jak je třeba, a programy pak vrátí rozložené síť tohoto tělesa.

Jeho práce porovnává dostupné softwarové vybavení pro tvorbu modelů, v čemž se nachází hlavní rozdíl mezi jeho prací [6] a touto bakalářskou prací. V této práci se budeme zabývat matematickým pohledem na papírové modely, které budeme pomocí výpočtů postupně rozkládat.

Na Fakultě elektrotechniky a informatiky podle dostupných informací dosud nevznikla práce podobného zaměření.

2 Určení umístění bodu v prostoru

V této kapitole se zaměříme na postup určení, v jaké části prostoru nebo roviny se daný bod nachází [12].

Určení umístění bodu v prostoru je důležité pro model z důvodu, že k dalšímu výpočtu potřebujeme, aby všechny vrcholy stěny ležely ve stejné rovině. Také dokážeme určit, zda bod leží ve stěně a nebo jestli se některé části tělesa nepřekrývají.

Cílem následujících kroků je určit umístění bodů v rovině či prostoru vůči vybraným bodům. Barycentrické souřadnice nám rovinu rozdělují na trojúhelníky nebo prostor na čtyřstěny, kde vrcholy trojúhelníka či čtyřstěnu vhodně vybíráme pro zjištění, do které části prostoru daný bod patří.

1. Pro n -rozměrný prostor K vezmeme $n + 1$ různých bodů (v rovině je $n = 2$ a v prostoru se $n = 3$) takových, že žádné tři z nich neleží na jedné přímce a žádné čtyři z nich neleží v jedné rovině. Takto získané souřadnice umístíme do matice A , kde jednotlivé body označíme písmenem a s indexy 1 až $n + 1$. Matice A bude mít rozměry $(n + 1)(n)$ a odpovídá systému $n + 1$ rovnic.
2. Sestavíme $n + 1$ rovnic pro $n + 1$ neznámých. Proměnné označíme písmenem p s indexy 1 až $n + 1$. Jako proměnné chápeme vektor $p^T = (p_1, \dots, p_n)$.
3. Bod, který zkoumáme, jak se chová k bodům v matici A , označíme x a vytvoříme vektor $x^T = (x_1, \dots, x_n)$, kde x_1 až x_n jsou souřadnice daného bodu.
4. Sestavíme matici $B = Ay$, kde $y = (y_1, \dots, y_{n+1})$ je jednotkovým vektorem. Zjistíme, zda matice B je singulární nebo regulární. Pokud bude matice B singulární nebo s malým číslem podmíněnosti, pak jsou body koplanární a jsou tudíž v podprostoru K , které odpovídají elementům matice A , nevhodně zvolené.
5. Sestavíme rovnici $Bp = x$. Vyjádříme vektor p tak, že ji zleva přenásobíme B^{-1} . Po přenásobení získáme na levé straně rovnosti identitu a vyjádříme vektor p ve tvaru $p = B^{-1}x$. Podle výsledku vektoru p , budeme rozhodovat, kde se zkoumaný bod v prostoru K nachází.

Poslední krok 5. se hodí dále pro práci ve 2D a 3D prostoru, protože nemusíme pro každé tři body (ve 2D prostoru) a pro každé čtyři body (ve 3D prostoru) sestavovat novou rovnici pokaždé, když vůči těmto bodům budeme chtít testovat nový bod. Zaměníme jen vektor x a dostaneme hodnoty nového vektoru p , přičemž nebudeme muset vždy řešit znovu $n+1$ rovnic pro $n+1$ neznámých.

2.1 Rozbor pro výsledná p

Projďeme jednotlivé prvky vektoru p , který vypočteme z rovnice $p = B^{-1}x$, přičemž za x budeme dosazovat vektory, které získáme z dosazovaných bodů. Podle hodnot vektoru p rozhodneme o výsledném umístění zkoumaného bodu. Podrobnosti se dočteme v následujících podkapitolách.

2.1.1 Rozbor pro rovinu

Nyní se podíváme na vektor p ve 2D prostoru (rovině). V rovině zkoumáme umístění bodů v barycentrických souřadnicích vzhledem k umístění vůči námi zvolenému trojúhelníku, přičemž p_x se vztahují k jednotlivým vrcholům námi zvoleného trojúhelníku.

- $p_x < 0$ – Pokud bude jedna z proměnných záporná, pak zkoumaný bod neleží v daném trojúhelníku.
- $p_x = 0$ – Pokud bude jedna z proměnných nulová, pak leží bod na hranici trojúhelníku, která je proti vrcholu u něhož je výsledná souřadnice nulová. Pokud dvě souřadnice vyjdou nulové pak zkoumaný vrchol je ten, jehož odpovídající p_z je nenulové.
- $p_x > 0$ – Pokud jsou všechny proměnné kladné, pak se bod nachází uvnitř trojúhelníku.

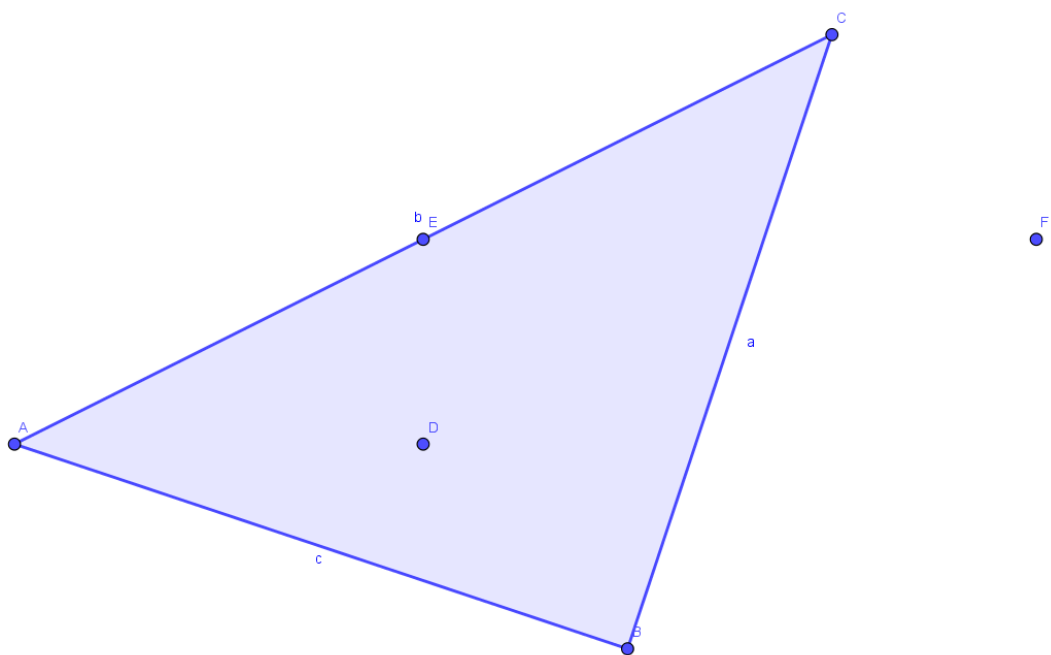
2.1.2 Příklad řešení v rovině

Máme trojúhelník s vrcholy $A = [1, 1]$, $B = [4, 0]$ a $C = [5, 3]$. Vezměme body $D = [3, 1]$, $E = [3, 2]$, $F = [6, 2]$ a bod A . Trojúhelník můžeme vidět na obrázku 3. V následující části ověříme, že výpočet pomocí inverzní matice je mnohem rychlejší než postupné výpočty jednotlivých matic.

Nejprve najdeme umístění bodů D , E , F a A , tedy pro každý vypočteme vektor p , podle výsledků určíme umístění bodů pomocí postupného přenásobování každého vektoru zvlášť. V další části najdeme vektor p pro každý bod za pomoci inverzní matice.

Ověříme, zda bod D leží uvnitř trojúhelníku ABC . Vytvoříme vektory a , b , c a d v homogenních souřadnicích z vrcholů trojúhelníku a z bodu D . Každému z nich přidáme jedničkovou souřadnici a sestavíme matici:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} A_x & B_x & C_x & D_x \\ A_y & B_y & C_y & D_y \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array} \right] \end{aligned}$$



Obrázek 3: Trojúhelník ABC

Všechny souřadnice vektoru p jsou kladné, to znamená, že bod D leží uvnitř trojúhelníku ABC.

Ověříme, zda bod E leží uvnitř trojúhelníku ABC. Vytvoříme vektory a , b , c a e z vrcholů trojúhelníku a z bodu E. Každému z nich přidáme jedničkovou souřadnici a sestavíme matici:

$$\begin{bmatrix} Ax & Bx & Cx & | & Ex \\ Ay & By & Cy & | & Ey \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 3 & | & 2 \\ 1 & 4 & 5 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 3 & 4 & | & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 10 & | & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Jedna souřadnice vektoru p je nulová to znamená, že bod E tedy leží na hranici trojúhelníku.

Ověříme, zda bod F leží uvnitř trojúhelníku ABC. Vytvoříme vektory a, b, c a f z vrcholů trojúhelníku a z bodu F. Každému z nich přidáme jedničkovou souřadnici a sestavíme matici:

$$\begin{bmatrix} A_x & B_x & C_x & F_x \\ A_y & B_y & C_y & F_y \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Jedna souřadnice vektoru p je záporná to znamená, že bod F leží mimo trojúhelník ABC.

Ověříme, zda bod A leží uvnitř trojúhelníku ABC. Vytvoříme vektory a, b a c z vrcholů trojúhelníku. Každému z nich přidáme jedničkovou souřadnici a sestavíme matici:

$$\begin{bmatrix} A_x & B_x & C_x & A_x \\ A_y & B_y & C_y & A_y \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dvě souřadnice vektoru p jsou nulové to znamená, že bod A tedy je vrcholem trojúhelníku.

Nyní předvedeme výpočet vektoru p pro jednotlivé body za pomoci inverzní matice. Nejprve vypočteme inverzní matici B^{-1} . Inverzní matici potřebujeme pro řešení rovnice $p = B^{-1}x$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} A_x & B_x & C_x & 1 & 0 & 0 \\ A_y & B_y & C_y & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{array} \right)$$

Vypočteme determinant B^{-1} .

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{vmatrix} = 0, 1$$

Matice B^{-1} není singulární.

Nyní matici B^{-1} přenásobíme jednotlivé body, které chceme testovat a získáme vektory p .

Výpočet vektoru p pro bod D:

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Výpočet vektoru p pro bod E:

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Výpočet vektoru p pro bod F:

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Výpočet vektoru p pro bod A:

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Výsledné vektory p odpovídají výsledkům které jsme získali také předchozím postupem. Pokud počítáme ověření pouze pro jeden bod je rychlejší první verze řešení, pokud však potřebujeme určit umístění více bodů je efektivnější vypočítat inverzní matici.

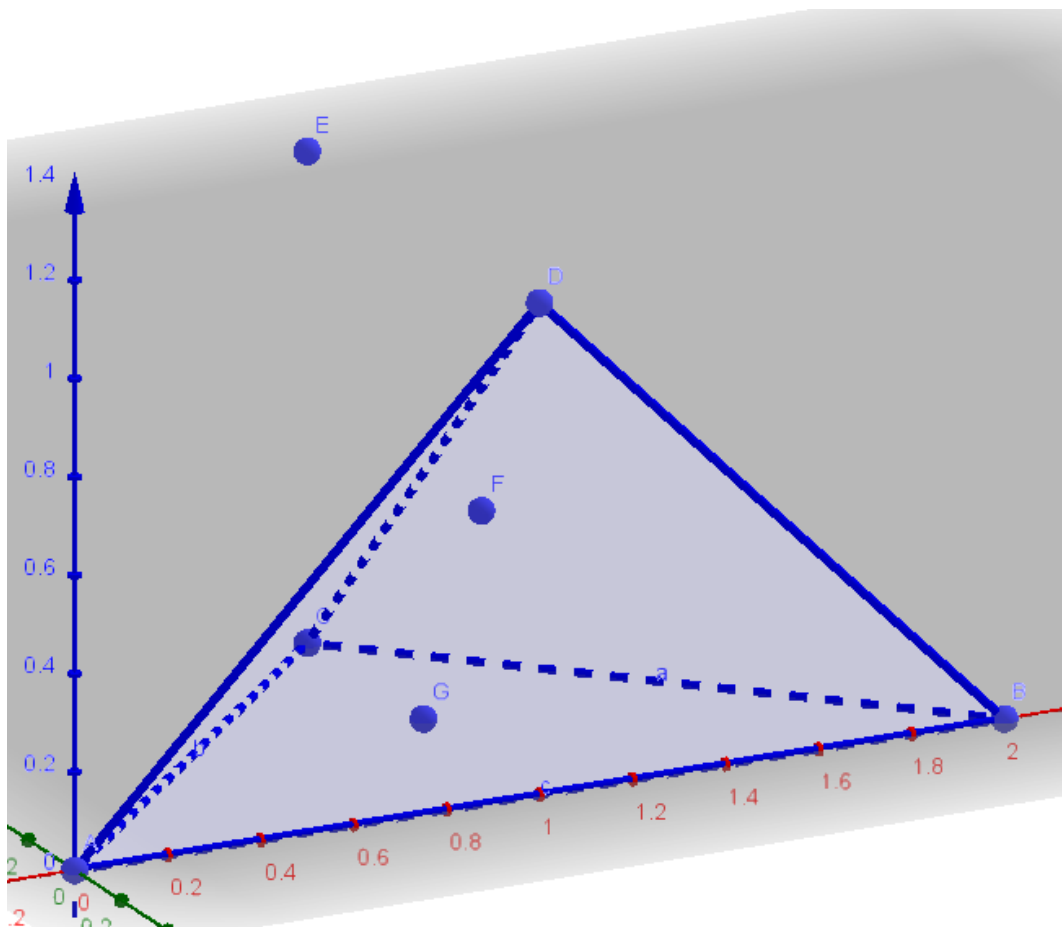
2.1.3 Rozbor v prostoru

Nyní se podíváme na vektor p ve 3D prostoru. V prostoru zkoumáme umístění bodů v barycentrických souřadnicích vzhledem k umístění vůči námi zvoleného čtyřstěnu, přičemž souřadnice p_x se vztahují k jednotlivým vrcholům námi zvoleného čtyřstěnu.

- $p_x < 0$ – Pokud vychází alespoň jedna z proměnných záporná, pak zkoumaný bod neleží v daném čtyřstěnu.
- $p_x = 0$ – Pokud je jedna z proměnných nulová, pak zkoumaný bod leží na rovině, která je tvořena ostatními třemi body. Pokud tři souřadnice vyjdou nulové pak zkoumaný vrchol je ten, jehož odpovídající p_z je nenulové.
- $p_x < 0$ – Pokud vychází všechny proměnné kladné, pak zkoumaný bod leží uvnitř čtyřstěnu.

2.1.4 Příklad řešení pro 3D prostor

Máme rovinu ABC a doplňkový bod roviny D, tedy čtyřúhelník ABCD, který můžeme vidět na obrázku 4. Vrcholy čtyřstěnu ABCD mají souřadnice $A = [0; 0; 0]$, $B = [2; 0; 0]$, $C = [1; 1; 0]$ a



Obrázek 4: Čtyřstěn ABCD

$D = [1; 0; 1]$. Vezměme například body $E = [1; 1; 1]$, $F = [1; 0, 25; 0, 5]$, $G = [1; 0, 5; 0]$ a bod A. Pro výpočet z bodů vytvoříme vektory, kdy každému vektoru přidáme poslední souřadnici rovnou 1, bude se tedy jednat o vektory v homogenních souřadnicích. Z vektorů následně sestavíme matice pro výpočet jednotlivých souřadnic vektoru p , pro každý vrchol zvlášť, které nám pomáhají identifikovat umístění zkoumaného bodu v prostoru.

Budeme řešit soustavy rovnic $Bp = x$, kde x bude postupně odpovídat všem námi zvoleným bodům. Všechny rovnice spočítáme a následně pro porovnání složitosti spočítáme inverzní matici B^{-1} a spočítáme rovnice $p = B^{-1}x$ a porovnáme složitosti výpočtu. Tyto výpočty předvedeme pro odůvodnění proč je počítání s inverzními maticemi efektivnější.

Ověříme, zda bod E leží v dané rovině:

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cccc|c} A_x & B_x & C_x & D_x & E_x \\ A_y & B_y & C_y & D_y & E_y \\ A_z & B_z & C_z & D_z & E_z \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \\
& \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \\
& \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Dvě souřadnice vektoru p jsou záporné, proto bod E leží mimo čtyřstěn ABCD.
Ověříme, zda bod F leží ve čtyřstěnu ABCD:

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cccc|c} A_x & B_x & C_x & D_x & F_x \\ A_y & B_y & C_y & D_y & F_y \\ A_z & B_z & C_z & D_z & F_z \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \sim \\
& \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \sim \\
& \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Všechny souřadnice vektoru p jsou kladné, proto bod F leží uvnitř čtyřstěnu ABCD.
 Ověříme, zda bod G leží ve čtyřstěnu ABCD:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|c} A_x & B_x & C_x & D_x & G_x \\ A_y & B_y & C_y & D_y & G_y \\ A_z & B_z & C_z & D_z & G_z \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \\
 & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \\
 & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Jedna souřadnice vektoru p je nulová, proto bod G leží uvnitř stěny čtyřstěnu ABCD.
 Ověříme, zda bod A leží ve čtyřstěnu ABCD:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|c} A_x & B_x & C_x & D_x & A_x \\ A_y & B_y & C_y & D_y & A_y \\ A_z & B_z & C_z & D_z & A_z \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \\
 & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim
 \end{aligned}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Tři souřadnice vektoru p jsou nulové, to znamená, že bod A je vrcholem čtyřstěnu ABCD.

Nyní si předvedeme výpočet vektoru p pro jednotlivé body za pomoci inverzní matice. Vypočteme si inverzní matici B^{-1} .

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} A_x & B_x & C_x & D_x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ A_y & B_y & C_y & D_y & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_z & B_z & C_z & D_z & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Vypočteme determinant B^{-1} .

$$\left| \begin{array}{cccc} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| = -0,5$$

Matice B^{-1} není singulární.

Nyní matici B^{-1} přenásobíme jednotlivé body, které chceme testovat a získáme vektory p .
 Výpočet vektoru p pro bod E:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Výpočet vektoru p pro bod F:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Výpočet vektoru p pro bod G:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Výpočet vektoru p pro bod A:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Výsledné vektory p odpovídají výsledkům které jsme získali také předchozím postupem. Pokud počítáme ověření pouze pro jeden bod je rychlejší první verze řešení, pokud však potřebujeme určit umístění více bodů stejné roviny je efektivnější vypočítat inverzní matici.

3 Uložení stěny tělesa

Předpokládejme, že těleso je popsáno souřadnicemi bodů. Dále, že máme předem určeno, které body spolu tvoří stěnu a které ne. Každou stěnu uložíme jako pole polí, které nazveme stěny. Jako první pole v poli Stěny bude vnější ohraničení stěny (cyklus), které získáme tak, že body tvořící ohraničení stěny jsou uloženy v posloupnosti za sebou v pořadí, které získáme při obcházení stěny tělesa po její hranici proti směru hodinových ručiček při pohledu na stěnu z vnější (potištěné) strany tělesa. Zapisovat body budeme v pořadí, jak na ně postupně narazíme. Ve chvíli, kdy dojdeme k výchozímu bodu, máme stěnu kompletní a bod již znova nezapisujeme.

Vrcholy stěn budou představovat vrcholy v grafu a ohraničení stěn v tělese budou hrany tohoto grafu. Tento graf musí být rovinný, protože jeho hrany se nemůžou křížit, pokud uzavírají stěnu. Další podmínkou pro tyto hrany je, že musí tvořit právě jeden cyklus, který určuje právě dvě oblasti grafu (vnější a vnitřní část). Stěnou bude vnitřní část tohoto grafu. Pro jednoduchou stěnu bychom nepotřebovali pole polí, ale stačilo by nám pole vrcholů. Pro složitější stěnu však potřebujeme pole polí a definice dalších polí v poli stěny budou popsány v kapitole 3.1.

Ještě musíme zkontrolovat, zda daná oblast je skutečně jednou stěnou v daném objektu. Stěna tělesa je rovinný útvar, to znamená, že všechny vrcholy daného grafu musí být v jedné rovině. To ověříme tak, že vezmeme libovolné tři vrcholy grafu a jeden bod, který v daném grafu neleží a neleží ani v jedné rovině s vybranými vrcholy.

Stěny se třemi vrcholy v jedné rovině vždy leží, protože rovina je tvořena třemi vrcholy. Pro stěny, které mají více vrcholů provedeme další šetření pomocí barycentrických souřadnic, které jsou popsány i s postupem využití v kapitole 2. a ověříme, zda všechny vrcholy stěny leží v jedné rovině tak, že vezmeme 3 vrcholy z dané stěny a jeden bod, který na této stěně neleží (získáme čtyřstěn) a budeme testovat všechny zbylé vrcholy testované stěny. Pokud neleží všechny body v jedné rovině, jedná se o chybný vstup a graf nemůžeme považovat za stěnu tělesa.

3.1 Vnitřní vrcholy stěny

Výše zmíněný postup funguje pro těleso, jehož stěnu popíšeme jen jedním vnějším cyklem. U papírových modelů se však budeme častěji setkávat s tělesy, jejichž stěnu bude tvořit jeden vnější cyklus a jeden nebo více vnitřních cyklů, které budou zobrazovat části roviny, které do stěny nepatří a modelář je bude muset vystříhnout (například okna a dveře). V tuto chvíli zužitkujeme fakt, že jako definici stěny používáme pole polí, protože každý cyklus je pole jednotlivých vrcholů po sobě následujících a všechna tato pole uložíme jako prvky pole Stěny.

Pro všechny prvky v jednotlivých polích pole Stěny provedeme také kontrolu, zda všechny vrcholy leží v jedné rovině, aby se jednalo o stěnu. Opět pro tento účel použijeme postup určení, zda bod leží v dané rovině dle kapitoly 2. Pomocí tohoto postupu také určíme, zda se cykly nekříží a to tak, že když leží jeden vrchol cyklu uvnitř jiného, pak tam musí ležet všechny vrcholy tohoto cyklu, v opačném případě se někde kříží a nejedná se o stěnu. Tímto postupem však nevyřadíme cykly, které se kříží pouze hranami (žádný vrchol jednoho cyklu se nenachází

uvnitř druhého cyklu), pokud se cykly kříží, stačí jen hranami, jedná se o špatně zadanou stěnu. Musíme tedy ještě zkontrolovat, zda průsečíky jednotlivých přímk, na kterých hrany leží, se nenachází mezi jednotlivými vrcholy cyklu.

4 Rozpoznání sousedních stěn

Pro vytvoření sítě tělesa musíme znát společné hrany jednotlivých stěn. Musíme tedy v poli poli Stěny určit, které stěny spolu sousedí a jaké hrany mají společné.

Předpokládejme, že máme na vstupu dvě stěny, kde každá ze stěn je definována několika vrcholy grafu (body ohraničující stěny grafu). Aby byly stěny v grafu sousední, musí mít společnou alespoň jednu hranu. To znamená, že pro každé dvě sousední stěny musíme najít alespoň dva vrcholy, mezi kterými existuje hrana (tedy sousední vrcholy) a které jsou pro oba tyto podgrafy (obě stěny tělesa) společné.

Nejčastěji bude v tělese pro sousední stěny právě jedna taková hrana. V opačném případě leží všechny společné hrany těchto dvou grafů na jedné přímce. Tato situace nastane ve chvíli, kdy na vstup dostáváme složitější útvar (například chybí část hrany tělesa viz obrázek 5). To se stane ve chvíli, kdy každý z vrcholů tvořící tyto hrany se nachází v alespoň třech stěnách.

Pro každou stěnu také sestavíme seznam sousedních stěn, které se stěnou sousedí tak, že celá hrana sousedících stěn se nachází uvnitř oblasti některé z těchto stěn. Ze seznamů sousedů jednotlivých stěn sestavíme duální graf sousedních stěn v tělese. Příklad duálního grafu můžeme vidět na obrázku 6.

4.1 Kód pro rozpoznání sousednosti stěn

V této kapitole máme pseudokód pro rozpoznání stěn. Na vstupu dostáváme trojrozměrné pole Stěny (což je pole všech stěn, kde každá stěna je polem polí jejich vrcholů), které porovnáváme a na výstupu získáme graf sousednosti stěn, viz obrázek 6.

Algoritmus projde vnější i vnitřní cykly a kontroluje, zda jednotlivé po sobě jdoucí vrcholy spolu sousedí (kontroluje je i pro případ opačného pořadí). Výsledek ukládá pro každou stěnu do stringu a počítá se kolik má stěna sousedů.

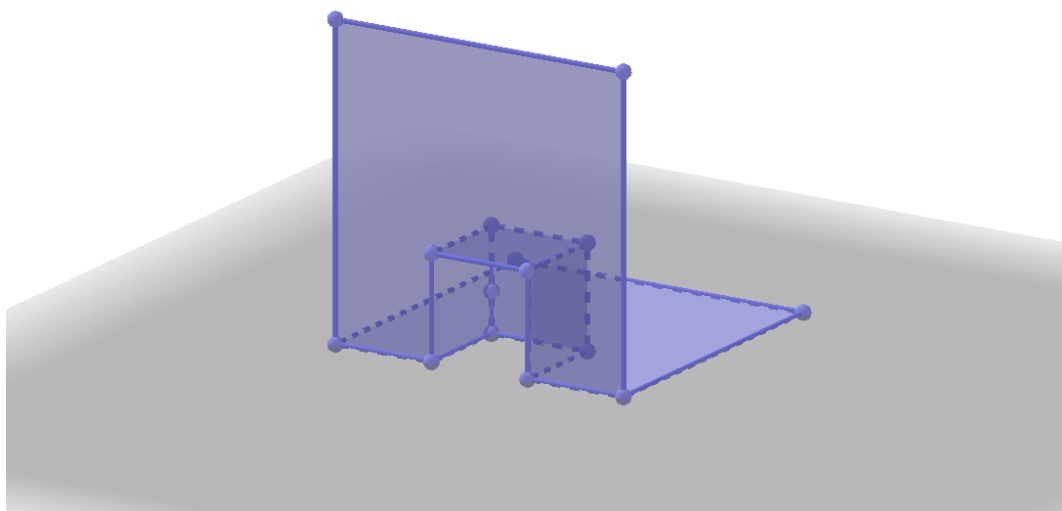
```
vstup(Steny){
    string sousede [Steny.length - 1];
    int sousede_pocet [Steny.length - 1];
    for(int i = 0; i < Steny.length - 1; i++){
        sousede [i] = "";
        sousede_pocet [i] = 0;
        for(int j = i + 1; j < Steny.length; j++){
            //průchod polem ohraničení stěn
            for(int k= 0; k< Steny[i].length; k++){
                //pro stěnu k
                for( int l = 0; l < Steny[i][k].length - 1; l++ ){
                    for(int m = 0; m < Steny[j].length; m++){
                        //pro stěnu j
```

```

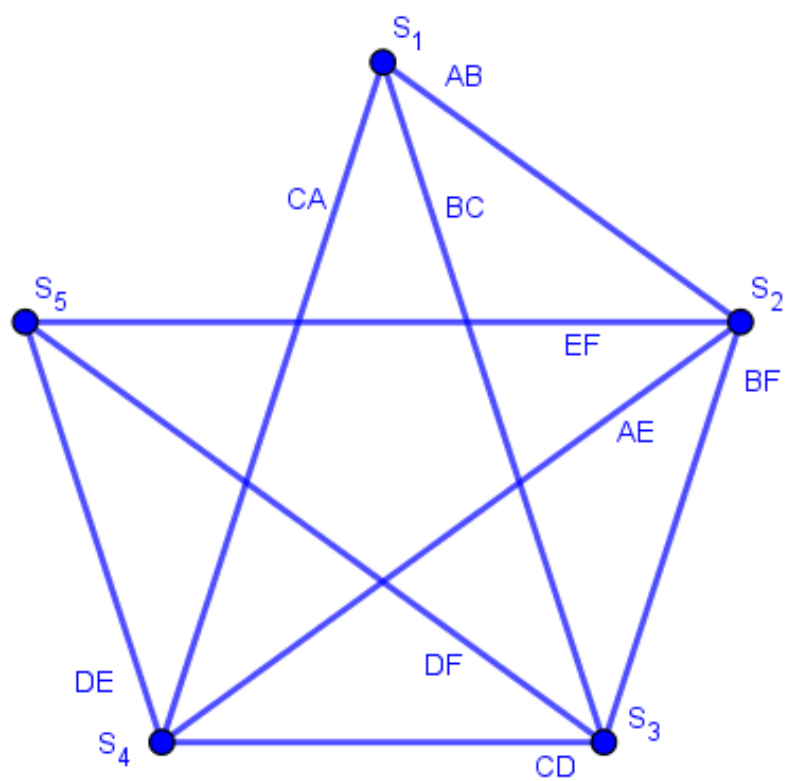
    for( int n = 0; n < Steny[j][m].length - 1; n++ ){
        if(l == 0){
            l_pred = Steny[i][k][Steny[i][k].length-1];
            l_nasl = Steny[i][k][l+1];
        }
        else{
            l_pred = Steny[i][k][l-1];
            l_nasl = Steny[i][k][l+1];
        }
    }
    if(n == 0){
        n_pred = Steny[j][m][Steny[j][m].length-1];
        n_nasl = Steny[j][m][n+1];
    }
    else{
        n_pred = Steny[j][m][n-1];
        n_nasl = Steny[j][m][n+1];
    }
    if(Steny[i][k][l] == Steny[j][m][n]){
        if((n_pred == l_pred) || (n_pred == l_nasl)){

            string sousede[i] = string_sousede+Steny[i][k][l]+n_pred+" ";
            sousede_pocet[i] ++;
        }
    }
}
}
}
}
}
}
}

```



Obrázek 5: „Zub“ ve stěně



Obrázek 6: Duální graf sousedních stěn v tělese

5 Rozložení tělesa na síť

Předpokládejme, že máme vrcholy tělesa, množinu stěn a duální graf sousednosti stěn (díky kterému víme, jak v tělese jednotlivé stěny sousedí).

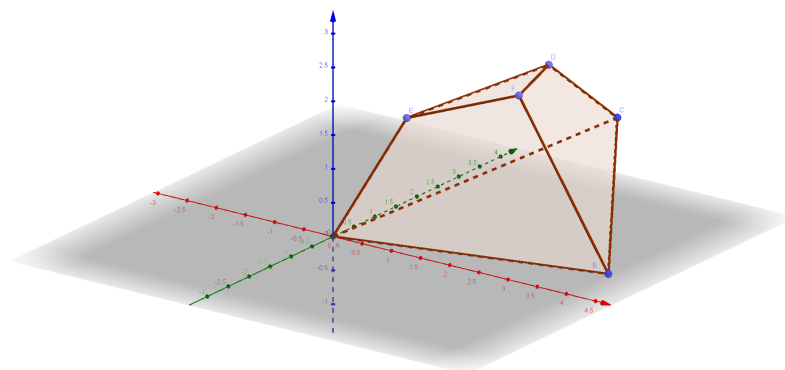
Sestavíme nový graf tělesa, který bude acyklický a označíme jej S (graf S bude podgrafem duálního grafu sousednosti). Graf sítě S bude jednout z možných koster duálního grafu sousednosti. Bude se tedy jednat buď o strom, pokud bude graf souvislý, popřípadě když se graf bude skládat z více komponent, pak se bude jednat o les. Pokud výsledným grafem bude les, pak síť tělesa nebude souvislá.

Nyní budeme vytvářet graf sítě S , který bude následně představovat síť papírového modelu (ne papírové vystřihovánky), tudíž se nyní zálepkami nebudeme zabývat. Pokud bychom chtěli sestavit papírovou vystřihovánku, budeme ještě navíc přidávat zálepky. Postup, jakým způsobem se jednotlivé zálepky přidávají, se nachází v kapitole 7.

5.1 Postup sestavení grafu S

Nyní sestavíme graf sítě tělesa S . Budeme postupovat v jednotlivých krocích:

1. Pro každý vrchol v tělese sečteme vnitřní úhly všech stěn u právě kontrolovaného vrcholu. Pokud je výsledný součet menší než 360° , pak můžou (pokud nenastane problém s kolizí dvou stěn) být všechny hrany, které jsou v grafu použity, také ve vytvořené síti tělesa. Pokud je součet vyšší, pak nebudeme moci využít všechny hrany, které v daném duálním grafu z tohoto vrcholu vedeme.
2. Nyní budeme procházet duální graf sousednosti stěn. Zvolíme libovolně jeden vrchol, který odpovídá stěně tělesa, jako kořen stromu.
3. Z duálního grafu sousednosti vytáhneme další vrchol, který je propojen hranou s námi vybraným kořenem, označme si jej X . Ověříme, zda součet úhlů ve stěnách u každého ze společných vrcholů je menší nebo roven než 360° . Pokud vrchol X tuto podmínku splní, pak je vložen do vznikajícího grafu sítě S .
4. Vezmeme další vrchol duálního grafu sousednosti, který ovšem ještě není v grafu sítě S a má společnou hranu s vrcholem odpovídajícím aktuálně zvolenému kořenu v grafu sítě S , označme si jej například Y . Ověříme vnitřní úhly u vrcholů vložených stěn a stěny, kterou bychom chtěli přidat. Pokud úhly splňují podmínku, že nejsou větší než 360° , pak hranu s vrcholem Y přidáme do grafu sítě S .
5. Postup z bodu 4 opakujeme, dokud lze tímto způsobem přidávat vrcholy do grafu sítě S . Pokud již neexistuje vrchol, který by sousedil se zvoleným kořenem, pak budeme vybírat nový kořen z vrcholů, které jsou již vloženy do grafu sítě S a v duálním grafu sousednosti sousedí s vrcholem, který ještě přidaný nemáme. Pokud nelze vybrat nový kořen z již vložených vrcholů, pokračujeme následujícím krokem.



Obrázek 7: Seříznutý čtyřstěn

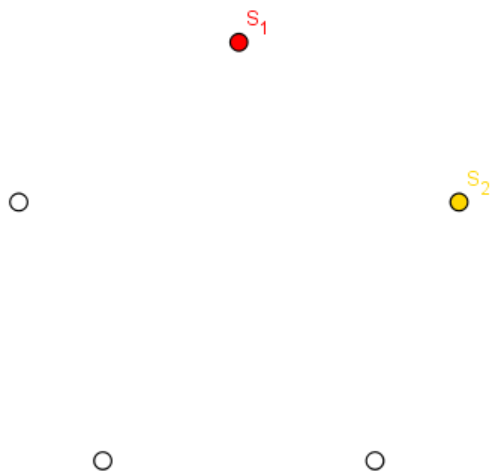
6. Ze zbývajících vrcholů (pokud nějaké existují), které nejsou umístěny v grafu sítě zvolíme z nich nový kořen a opakujeme postup od bodu 5. Tímto způsobem vznikne strom nebo les, jenž bude odpovídat grafu sítě S .

Tento postup však není jednoznačný a při jiném pořadí zpracování stěn můžeme dostat různý počet komponent. Postup by bylo možné zoptimalizovat, ale pro jednoduchost se budeme řídit tímto postupem.

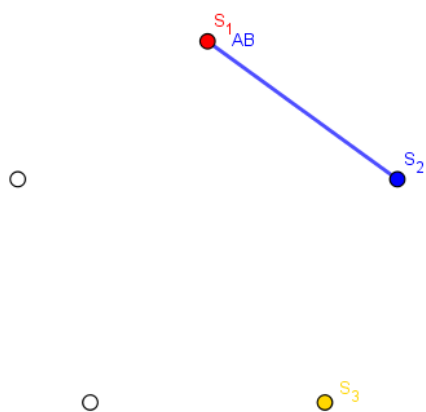
5.2 Příklad rozkladu seříznutého čtyřstěnu na síť

Mějme těleso na obrázku 7. Vrcholy duálního grafu odpovídají stěnám S_1, S_2, \dots, S_5 tělesa. Proto vrcholy duálního grafu i vznikající kostru grafu označíme S_1, S_2, \dots, S_5 . Sestavíme kostru tělesa. Předpokádejme, že máme duální graf sousednosti z obrázku 6.

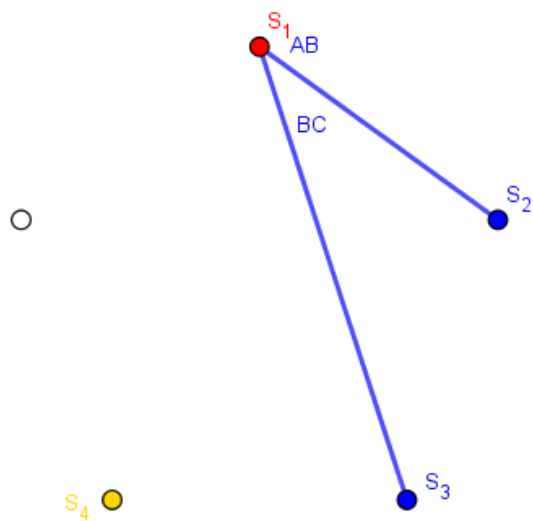
1. Zvolíme první vrchol například S_1 , jak můžeme vidět na obrázku 8.
2. Vezmeme vrchol sousedící s S_1 v duálním grafu, vrchol S_2 . Stěny S_1 a S_2 v tělese spolu sousedí přes hranu AB . Zkontrolujeme, zda hranu mezi S_1 a S_2 můžeme zařadit do kostry grafu. Platí $S_{1A} + S_{2A} < 360^\circ$ a $S_{1B} + S_{2B} < 360^\circ$, můžeme přidat hranu, kterou nazveme AB . Jak můžeme vidět na obrázku 9.
3. Vezmeme vrchol S_3 , který sousedí s vrcholem S_1 přes hranu BC . U vrcholu B máme již umístěny dvě stěny, musíme tedy počítat se všemi zařazenými stěnami. Platí $S_{1B} + S_{2B} + S_{3B} < 360^\circ$ a $S_{1C} + S_{3C} < 360^\circ$, přidáme hranu BC . Jak můžeme vidět na obrázku 10.
4. Vezmeme poslední vrchol sousedící s vrcholem S_1 , vrchol S_4 . Platí $S_{1A} + S_{2A} + S_{4A} < 360^\circ$ a $S_{1C} + S_{3C} + S_{4C} < 360^\circ$, přiřadíme hranu AC . Vrchol S_1 již nemá žádné další vrcholy s kterými by sousedil, označíme tedy druhý vložený vrchol, vrchol S_2 . Jak můžeme vidět na obrázku 11.



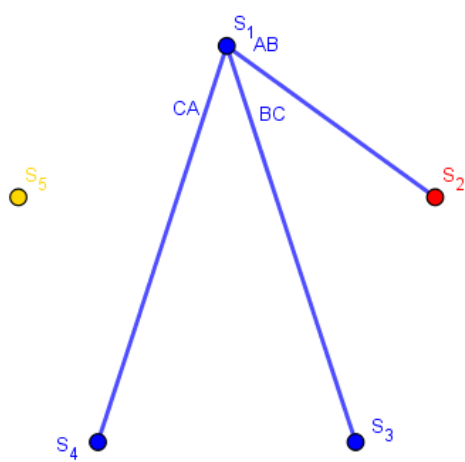
Obrázek 8: Zvolený vrchol S_1



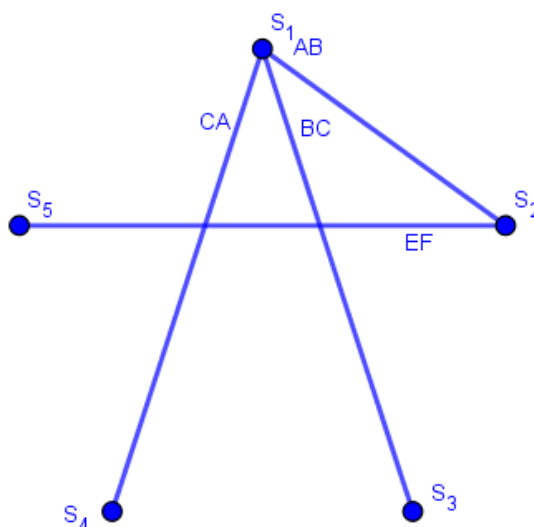
Obrázek 9: Vložení hrany AB mezi vrcholy S_1 a S_2



Obrázek 10: Vložení hrany BC mezi vrcholy S1 a S3



Obrázek 11: Vložení hrany CA mezi vrcholy S1 a S4



Obrázek 12: Vložení hrany EF mezi vrcholy S2 a S5

5. Vezmeme nevložený vrchol, který sousedí s námi zvoleným vrcholem V2, vrchol V5, který je zároveň posledním nevloženým vrcholem. Platí $S2_E + S5_E < 360^\circ$ a $S2_F + S5_F < 360^\circ$, vložíme vrchol S5 a hranu EF. Máme kompletní kostru grafu, viz obrázek 12.

5.3 Tělesa nerozložitelná do roviny

Při rozvíjení těles do roviny se setkáme s tělesy, které nedokážeme rozvinout do jediné sítě, aniž by se její části překrývaly. Základním problémem při rozkládání těles do roviny je ten, že kolem některých vrcholů může součet vnitřních úhlů u vrcholů ve všech stěnách, které tento vrchol obsahují, nabývat větších hodnot než 360° neboli 2π . Dalším problémem je, že při rozkládání stěn se může stát, že se hrany budou přidávat do „kruhu“, díky čemu se překryjí stěny, které se v našem tělese možná ani nepotkávají. Tímto problémem se v této práci zabývat nebudeme. Také se můžeme setkat s komplikací, že se budou stěny překrývat, protože nemusí mít všechny stěny stejnou velikost a některé mohou tedy být delší, než jsme očekávali při rozkladu tělesa na síť.

Existují tělesa, u kterých na první pohled poznáme, že do roviny rozvinout nelze. Jedná se o taková tělesa, která mají uvnitř některé ze stěn nějakou specialitu. Například, pokud vezmeme jako těleso krychli s výklenkem ve stěně, jak můžeme vidět na obrázku 21, pak tuto speciální krychli rozložit do roviny nebude možné.

Pro ulehčení práce algoritmu můžeme sami některé hrany mezi stěnami vyřadit. K tomuto účelu nám poslouží seznam sousedních stěn, jejichž společná hrana se nachází uvnitř některé ze



Obrázek 13: Kostel svatého Mikuláše, autor fotografie: Michal Kmínek

stěn tělesa. Ty při sestavování sousednosti stěn v grafu obarvíme jinou barvou než hrany mezi stěnami, které spolu sousedí jen vnějšími hranami.

Problémy při rozkladu do roviny mohou tvořit některé kvadriky, tedy nelineární plochy. Příkladem problémového objektu, který nelze rozvinout do roviny, je kulová plocha. Tu musíme aproximovat tak, že ji nařežeme na úzké pruhy. Protneme kouli přímkou tak, aby procházela středem koule. Pak spojíme rovnoměrně přímkami průsečíky koule a přímky. Čím více dílků získáme, tím bude aproximace přesnější. V místech přímek těleso nařízíme a tím získáme přibližné rozložení koule do roviny. Modelem rozložené a opět složené koule z papíru může být například globus. Půlkulovité můžou být například kopulovité střechy budov (například střecha kostela svatého Mikuláše v Praze, kterou můžeme vidět na obrázku 13).

Dalším problémovým tělesem je rotační hyperboloid nebo jeho část. Ten lze aproximovat podobným způsobem jako kouli. Pospojujeme hyperbolami vždy dva body, které leží na jedné



Obrázek 14: Chladicí věže, autor fotografie: Japo



Obrázek 15: Přední kapota z modelu škoda 120, autor fotografie: 2BeerOrNot, autor modelu: R. Vyškovský

přímce kolmé k postavě tak, aby hyperboly byly na hyperboloidu rozmístěny pravidelně. Hyperboloid nařízíme po celé délce hyperboly, kromě jejích konečných bodů. Získáme opačný tvar než při rozkladu koule. Tvar rotačního hyperboloidu mají například chladicí věže v elektrárnách, které můžeme vidět na obrázku 14.

U koule i u rotačního hyperboloidu přidáme zálepky ve tvaru trojúhelníků, které nemají velkou plochu nebo lépe dlouhou hranu společnou s lícovou stranou a tedy příliš nedeformují výsledný tvar slepeného tělesa. Zálepky pro hranu, která vypadá jako kružnice nebo její část můžeme vidět na obrázku 15.

6 Otáčení stěn tělesa do roviny námi zvolené stěny tělesa

Máme popsané těleso a víme, jak sousedí jeho stěny z duálního grafu sousednosti stěn a známe graf sítě, který je kostrou duálního grafu sousednosti stěn tělesa a zároveň kořenovým stromem. Stěna odpovídající kořenu stromu leží v rovině, do které budeme klopit stěny tělesa.

Pro sestavení sítě tělesa nejprve z grafu sítě S určíme vzdálenosti stěn od kořene grafu S . Kořenem je vrchol, který odpovídá stěně tělesa, do jejíž roviny budeme sklápět. Stěny do této roviny budeme sklápět postupně od těch nejbližších k těm nejvzdálenějším.

Pokud otočíme do roviny stěnu X , pak o stejný úhel ve stejném směru otočíme také všechny stěny, které odpovídají v grafu sítě S vrcholům podstromu s kořenem X . To znamená, že stěny se vzdáleností 1 otočíme právě jedenkrát, zatímco stěny se vzdáleností 2 otočíme právě dvakrát atd. Osy otáčení budou stále ležet v rovině určené stěnou, která odpovídá kořenu grafu sítě S .

Vypočítáme normálu stěny pro kořen grafu sítě S a pro stěnu, kterou chceme otočit do roviny s kořenem grafu. Spočítáme odchylku normál stěn a úhel ϕ určuje úhel, o který bude otáčena stěna X a o který budou otáčeny stěny, ke kterým přes stěnu X vede cesta od kořene v grafu sítě S .

6.1 Výpočet normály stěny

Normála roviny σ je vektor \vec{n} , který je kolmý ke všem vektorům ležícím v rovině σ . Normálový vektor roviny spočítáme jako vektorový součin dvou různých vektorů, jenž leží v dané rovině. Například směrovými vektory dvou stěn, které získáme tak, že vezmeme první z bodů stěny (označme jej například A), který máme uložený a vedeme úsečky do druhého bodu (B) a třetího bodu (C). Z úseček vytvoříme vektory s orientací od bodu A . Pak vypočteme vektorový součin vektorů $\vec{AB} \times \vec{AC}$.

Nyní vypočteme normály pro stěny našeho seřiznutého čtyřstěnu, který můžeme vidět na obrázku 7.

- Pro stěnu 1 najdeme dva vektory nacházející se v rovině stěny 1, které nejsou rovnoběžné (jejich skalární součin se neblíží jedničce). Dostaneme vektory \vec{AB} a \vec{AC} , mezi kterými vypočteme vektorový součin. Získáme normálový vektor $\text{norm}_{S1} = [1; -4; 14]$.
- Nyní spočítáme normálu stěny 2 vektorovým součinem \vec{AB} a \vec{AE} . Normálou stěny 2 je $\text{norm}_{S2} = [\frac{39}{25}; \frac{-156}{25}; \frac{91}{25}]$.
- Z vektorového součinu \vec{BC} a \vec{BD} získáme normálu stěny 3 $\text{norm}_{S3} = [\frac{96}{25}; \frac{36}{25}; \frac{84}{25}]$.
- Pro normálu stěny 4 $\text{norm}_{S4} = [\frac{24}{5}; \frac{-12}{5}; 0]$ jsme spočítali vektorovým součinem \vec{AC} a \vec{AD} .
- Konečně spočítáme poslední normálu, normálu stěny 5. Tu spočítáme tak, že vypočteme vektorový součin $\vec{DE} \times \vec{DF}$ a získáme $\text{norm}_{S5} = [\frac{-81}{125}; \frac{-69}{500}; \frac{231}{100}]$.

Pokud je nějaký z vektorů nulový nebo blízký nule pak musíme zvolit jinou kombinaci vektorů pro tento vektor.

6.2 Výpočet odchylky dvou normál

Pro výpočet odchylky dvou normál využijeme vztah pro skalární součin a vypočteme úhel otočení α . Přičemž $\alpha = \arccos(\frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|})$.

Nyní spočítáme úhly, o které se otočí jednotlivé stěny do roviny stěny 1 a úhel, o který se otočí stěna 5 do roviny stěny 2.

Pro získání výsledného úhlu musíme znát správné umístění dané stěny v souřadném systému, abychom zjistili, na jakou stranu budeme stěnu otáčet (zda o kladný nebo záporný úhel). Spočteme tedy vektorové součiny normál těchto stěn. Označme si jej například v . Když se budeme dívat na vektor v z jeho počátku na jeho konec a stěnu potřebujeme otočit proti směru hodinových ručiček, a vektor, kolem kterého budeme otáčet je orientován stejným směrem jako vektor v , pak otáčíme o záporný úhel. Pokud budeme potřebovat otáčet po směru hodinových ručiček a vektor, kolem kterého budeme otáčet je opačný než vektor v , pak opět budeme otáčet o záporný úhel. Ve zbývajících případech budeme otáčet o úhel kladný.

- Spočítáme odchylku mezi normálami $\text{nor}\vec{m}_{S1}$ a $\text{nor}\vec{m}_{S2}$, jejíž výsledek je $\beta = 44,084^\circ$. Úhel, o který otáčíme $\alpha_{s1s2} = 135,916^\circ$.
- Spočítáme odchylku mezi normálami $\text{nor}\vec{m}_{S1}$ a $\text{nor}\vec{m}_{S3}$, jejíž výsledek je $\beta = 54,330^\circ$. Úhel, o který otáčíme $\alpha_{s1s3} = 125,670^\circ$.
- Nyní spočítáme poslední z odchylek souvisejících se stěnou 1, odchylku mezi normálami $\text{nor}\vec{m}_{S1}$ a $\text{nor}\vec{m}_{S4}$, jejíž výsledek je $\beta = 79,406^\circ$. Úhel, o který otáčíme $\alpha_{s1s4} = 79,406^\circ$.
- A konečně spočítáme poslední z úhlů, úhel mezi normálami $\text{nor}\vec{m}_{S2}$ a $\text{nor}\vec{m}_{S5}$, jejíž výsledek je $\beta = -62,290^\circ$. Úhel, o který otáčíme $\alpha_{s2s5} = 117,710^\circ$.

Máme všechny úhly, o které budeme otáčet jednotlivé stěny. Nyní musíme pro každou stěnu spočítat její matici otočení.

6.3 Sestavení matice otočení

Otáčet stěny budeme za pomoci homogenních souřadnic, jak je běžné v počítačové grafice. V prostoru odpovídají totiž všechny transformace násobením maticí řádu 4. Budeme pracovat s homogenními souřadnicemi, které získáme tak, že ke všem maticím v kartézské soustavě přidáme řádek, kde všechny prvky budou nulové kromě posledního, který bude roven 1 (pokud by byl menší než jedna, pak by se transformovaný objekt zmenšil a v případě, že by byl větší než 1, daný objekt by se zvětšil, jednalo by se tedy o stejnolehlost).

Stěnu tělesa budeme otáčet do jedné roviny se stěnou K , kterou jsme zvolili jako kořen grafu sítě S , kolem společné hrany stěny, označme ji například KL [3].

Vezmeme úsečku KL , kolem které budeme otáčet body v prostoru a přesuneme ji jedním koncem, například bodem K , do počátku souřadného systému. Posunutý bod L označíme M .

Dále otočíme bod M okolo osy x o úhel α_x tak, aby nově vzniklý bod M' se nacházel v rovině xz , což znamená že souřadnice $M'_y = 0$. Pokud $M_y = M_z = 0$ pak $\alpha_x = 0$ v opačném případě $\sin(\alpha_x) = \frac{M_y}{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}$ a zároveň $\cos(\alpha_x) = \frac{M_z}{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}$.

Nyní otočíme bod M' kolem osy y o úhel $-\alpha_y$, kde $\sin(\alpha_y) = \frac{M_x}{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}$ a $\cos(\alpha_y) = \sqrt{\frac{M_y^2 + M_z^2}{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}$ a dostaneme bod M'' .

A konečně otočíme M'' kolem osy z o úhel α , který jsme získali jako odchylku normál. Výslednou matici budeme násobit zleva opačnými maticemi všech předešlých transformací v opačném pořadí, kromě otočení kolem z -tové souřadnice. Dostaneme tedy matici:

$$Trans(K_x; K_y; K_z) Rot_x(-\alpha_x) Rot_y(\alpha_y) Rot_z(\alpha) Rot_y(-\alpha_y) Rot_x(\alpha_x) Trans(-K_x; -K_y; -K_z)$$

Místo tohoto postupu by bylo možné pro každý bod vypočítat nejdříve konečnou matici transformace a teprve pak jej přenásobit touto maticí. Je to však výpočetně náročnější, protože bychom museli násobit několik matic pro každý z vrcholů.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & K_x \\ 0 & 1 & 0 & K_y \\ 0 & 0 & 1 & K_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\alpha_x) & -\sin(-\alpha_x) & 0 \\ 0 & \sin(-\alpha_x) & \cos(-\alpha_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_y & 0 & \sin(\alpha_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha_y) & 0 & \cos(\alpha_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\alpha_y) & 0 & \sin(-\alpha_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-\alpha_y) & 0 & \cos(-\alpha_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_x) & -\sin(\alpha_x) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_x) & \cos(\alpha_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -K_x \\ 0 & 1 & 0 & -K_y \\ 0 & 0 & 1 & -K_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledná matice je velmi rozsáhlá, z tohoto důvodu jsou jednotlivé prvky zvlášť rozepsané níže:

$$\begin{aligned} x_{11} &= \cos(\alpha_y)^2 \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha_y)^2 \\ x_{12} &= -\cos(\alpha_y) \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha_x) + (-\cos(\alpha_y) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha_y) + \sin(\alpha_y) \cdot \cos(\alpha_y)) \cdot \sin(\alpha_x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{13} &= \cos(\alpha_y) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha_x) + (-\cos(\alpha_y) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha_y) + \sin(\alpha_y) \cdot \cos(\alpha_y)) \cdot \cos(\alpha_x) \\
x_{14} &= -(\cos(\alpha_y)^2 \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha_y)^2) \cdot K_x - (-\cos(\alpha_y) \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha_x) + (-\cos(\alpha_y) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha_y) + \sin(\alpha_y) \cdot \cos(\alpha_y)) \cdot \sin(\alpha_x)) \cdot K_y - (\cos(\alpha_y) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha_x) + (-\cos(\alpha_y) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha_y) + \sin(\alpha_y) \cdot \cos(\alpha_y)) \cdot \cos(\alpha_x)) \cdot K_z + K_x \\
x_{21} &= (-\sin(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha)) \cdot \cos(\alpha_y) + \sin(\alpha_x) \cdot \cos(\alpha_y) \cdot \sin(\alpha_y) \\
x_{22} &= (\sin(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot \sin(\alpha) + \cos(\alpha_x) \cdot \cos(\alpha)) \cdot \cos(\alpha_x) + (-(-\sin(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha)) \cdot \sin(\alpha_y) + \sin(\alpha_x) \cdot \cos(\alpha_y)^2) \cdot \sin(\alpha_x) \\
x_{23} &= -(\sin(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot \sin(\alpha) + \cos(\alpha_x) \cdot \cos(\alpha)) \cdot \sin(\alpha_x) + (-(-\sin(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha)) \cdot \sin(\alpha_y) + \sin(\alpha_x) \cdot \cos(\alpha_y)^2) \cdot \cos(\alpha_x) \\
x_{24} &= -((- \sin(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha)) \cdot \cos(\alpha_y) + \sin(\alpha_x) \cdot \cos(\alpha_y) \cdot \sin(\alpha_y)) \cdot K_x - ((\sin(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot \sin(\alpha) + \cos(\alpha_x) \cdot \cos(\alpha)) \cdot \cos(\alpha_x) + (-(-\sin(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha)) \cdot \sin(\alpha_y) + \sin(\alpha_x) \cdot \cos(\alpha_y)^2) \cdot \sin(\alpha_x)) \cdot K_y - ((\sin(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot \sin(\alpha) + \cos(\alpha_x) \cdot \cos(\alpha)) \cdot \sin(\alpha_x) + (-(-\sin(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha)) \cdot \sin(\alpha_y) + \sin(\alpha_x) \cdot \cos(\alpha_y)^2) \cdot \cos(\alpha_x)) \cdot K_z + K_y \\
x_{31} &= (-\cos(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot \sin(\alpha) - \sin(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha)) \cdot \cos(\alpha_y) + \cos(\alpha_x) \cdot \cos(\alpha_y) \cdot \sin(\alpha_y) \\
x_{32} &= (\cos(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot \sin(\alpha) - \sin(\alpha_x) \cdot \cos(\alpha)) \cdot \cos(\alpha_x) + (-(-\cos(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha)) \cdot \sin(\alpha_y) + \cos(\alpha_x) \cdot \cos(\alpha_y)^2) \cdot \sin(\alpha_x) \\
x_{33} &= -(\cos(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot \sin(\alpha) - \sin(\alpha_x) \cdot \cos(\alpha)) \cdot \sin(\alpha_x) + (-(-\cos(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha)) \cdot \sin(\alpha_y) + \cos(\alpha_x) \cdot \cos(\alpha_y)^2) \cdot \cos(\alpha_x) \\
x_{34} &= -((- \cos(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot \sin(\alpha) - \sin(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha)) \cdot \cos(\alpha_y) + \cos(\alpha_x) \cdot \cos(\alpha_y) \cdot \sin(\alpha_y)) \cdot K_x - ((\cos(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot \sin(\alpha) - \sin(\alpha_x) \cdot \cos(\alpha)) \cdot \cos(\alpha_x) + (-(-\cos(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha)) \cdot \sin(\alpha_y) + \cos(\alpha_x) \cdot \cos(\alpha_y)^2) \cdot \sin(\alpha_x)) \cdot K_y - ((\cos(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot \sin(\alpha) - \sin(\alpha_x) \cdot \cos(\alpha)) \cdot \sin(\alpha_x) + (-(-\cos(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha_y) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha_x) \cdot \sin(\alpha)) \cdot \sin(\alpha_y) + \cos(\alpha_x) \cdot \cos(\alpha_y)^2) \cdot \cos(\alpha_x)) \cdot K_z + K_z
\end{aligned}$$

Nyní budeme postupně otáčet stěny našeho tělesa podle zvoleného grafu sítě S. Jako rovinu, do které budeme klopit, zvolíme rovinu stěny 1, označme ji jako kořenová rovina. Jako první sestavíme matici otočení stěny 2 do kořenové roviny. Budeme matice násobit postupně zprava doleva.

1. Inverzní matici k posunutí $Trans(K_x; K_y; K_z)$ přenásobíme inverzní maticí otočení rotace

$$x \text{ } Rot_x(-\alpha_x). \text{ a získáme matici } M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Matici M_1 přenásobíme inverzní maticí rotace y $Rot_y(\alpha_y)$ a získáme novou matici

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}}{17} & 0 & \frac{4\sqrt{17}}{17} & 0 \\ -\frac{4\sqrt{17}}{17} & 0 & \frac{\sqrt{17}}{17} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Matici M_2 přenásobíme maticí rotace z $Rot_z(\alpha_{s1s2})$. Nyní získáme novou matici

$$M_3 = \begin{pmatrix} -0,174 & -0,169 & 0,970 & 0 \\ 0,697 & 0,675 & 0,243 & 0 \\ -0,696 & 0,718 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Matici M_3 přenásobíme maticí rotace y $Rot_y(-\alpha_y)$. Získáme novou matici

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0,899 & -0,169 & 0,404 & 0 \\ 0,404 & 0,675 & -0,617 & 0 \\ -0,169 & 0,718 & 0,675 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Matici M_4 přenásobíme maticí rotace x $Rot_x(\alpha_x)$. Získáme matici

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0,899 & 0,404 & 0,169 & 0 \\ 0,404 & -0,617 & -0,675 & 0 \\ -0,169 & 0,675 & -0,718 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

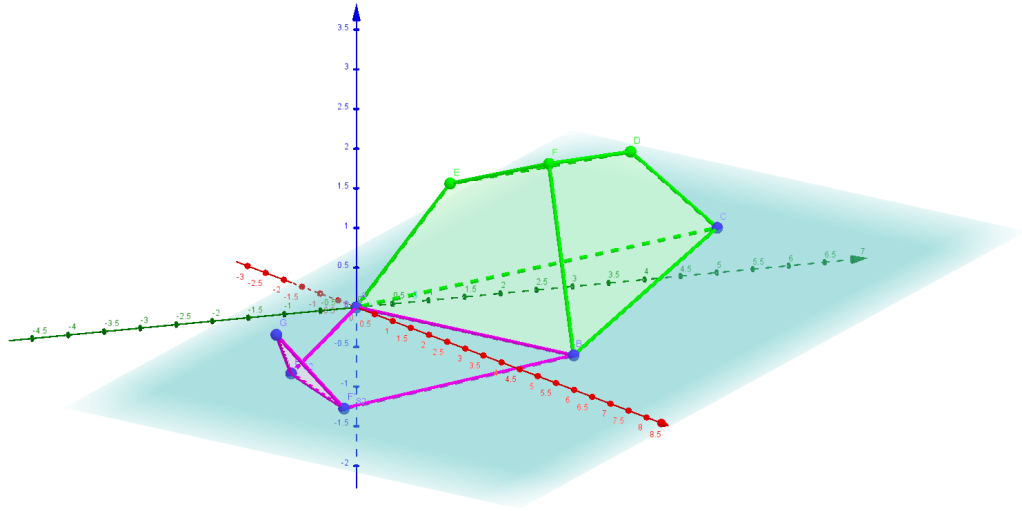
6. Matici M_5 přenásobíme maticí transformace $Trans(-K_x; -K_y; -K_z)$. Získáme matici

$$S2_{S1} = \begin{pmatrix} 0,899 & 0,404 & 0,169 & 0 \\ 0,404 & -0,617 & -0,675 & 0 \\ -0,169 & 0,675 & -0,718 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ což je matice otočení stěny 2 do kořenové ro-}$$

viny.

Nyní budeme postupně přenásobovat matici $S2_{S1}$ jednotlivými vektory, které odpovídají vrcholům stěny a tím je budeme klopat do kořenové roviny.

- Jako první získáme vrchol $A'_{S2} = [0; 0; 0]$, který odpovídá vrcholu A , protože je to jeden z vrcholů ležících na úsečce AB , kolem které otáčíme.
- Druhým zvoleným vrcholem bude vrchol B , který otočíme na $B'_{S2} = [4; 1; 0]$. Vrchol B' odpovídá B protože také leží na úsečce, kolem které točíme stěnu 2.
- Nyní budeme otáčet vrchol F a získáme vrchol $F'_{S2} = [2,803; -1,583; -0,652]$.
- Nyní budeme otáčet vrchol E a získáme vrchol $E'_{S2} = [1,151; -1,485; -0,506]$.



Obrázek 16: Otočení stěny 2 do kořenové roviny

- Nyní budeme otáčet vrchol D a získáme vrchol $D'_{S_2} = [2, 926; -2, 585; 0, 387]$. Ten se však nenachází v kořenové rovině.

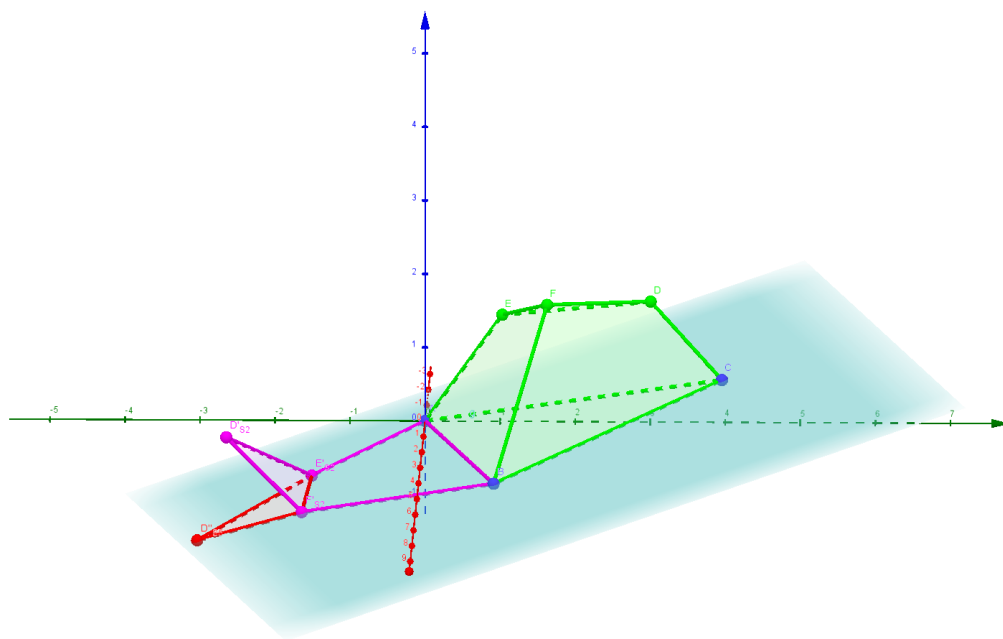
Nyní sestavíme ostatní matice otočení stejným způsobem jako matici S_{2S_1} . Získáme matice otočení

- $S_{5S_2} = \begin{pmatrix} 0,994 & 0,046 & -0,099 & 0,026 \\ -0,109 & 0,467 & -0,878 & -1,110 \\ 0,006 & 0,883 & 0,469 & 1,036 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $S_{3S_1} = \begin{pmatrix} -0,131 & -0,896 & 0,425 & 5,419 \\ -0,461 & 0,435 & 0,773 & 2,411 \\ -0,878 & -0,095 & -0,470 & 3,605 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $S_{4S_1} = \begin{pmatrix} 0,339 & 0,525 & -0,780 & 0 \\ 0,096 & 0,806 & 0,584 & -0,2 \cdot 10^{-8} \\ 0,936 & -0,274 & 0,223 & 0,1 \cdot 10^{-8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Na obrázku s číslem 16 můžeme vidět otočenou stěnu 2, otočenou stěnu 5 a původní těleso.

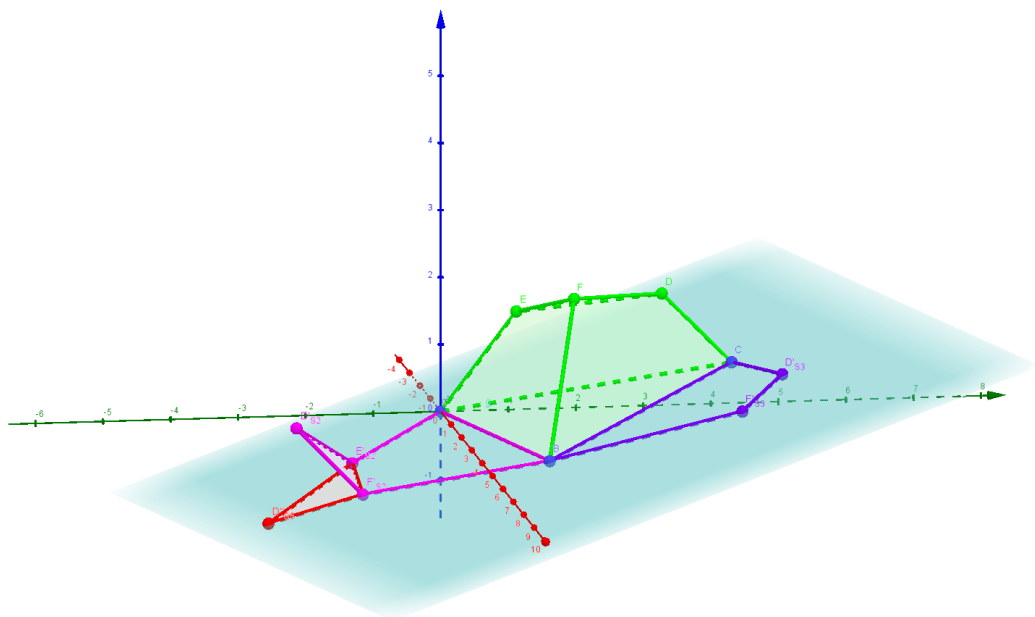
Nyní budeme těmito maticemi postupně otáčet jednotlivé vrcholy v seřiznutém čtyřstěnu. To provedeme tak, že matici otočení přenásobíme zprava vrcholem, který chceme otočit do kořenové roviny.

- Maticí S_{5S_2} přenásobíme souřadnice vrcholu D'_{S_2} a získáme nový vrchol D'' , kde vrchol $D''_{S_5} = [2, 776; -2, 977; -1, 049]$, jak můžeme vidět na obrázku 17.

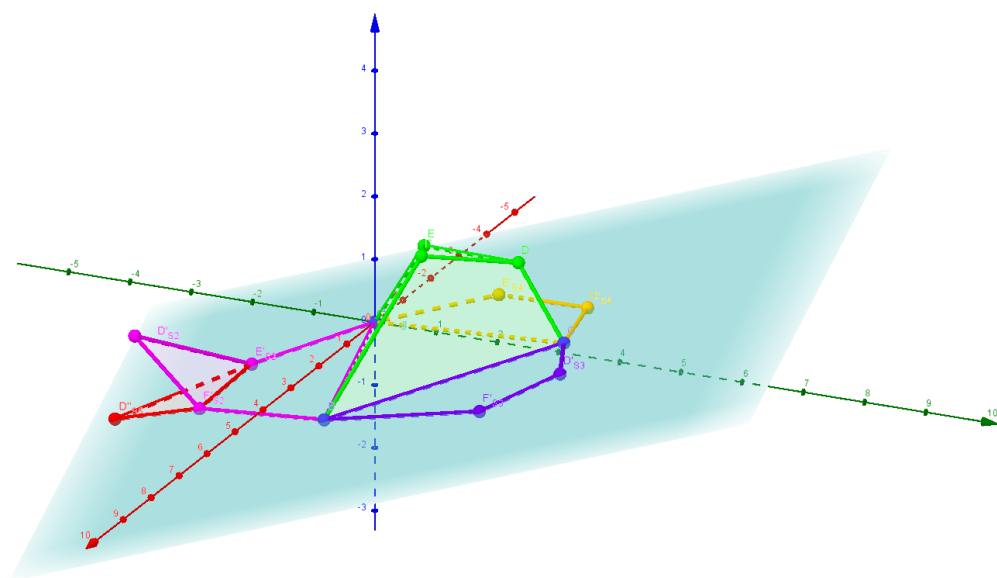


Obrázek 17: Otočení stěny 5 do kořenové roviny

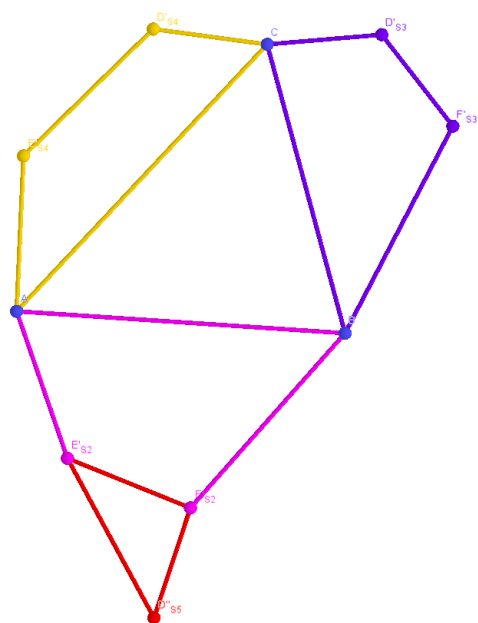
- Maticí $S3_{S1}$ přenásobíme souřadnice vrcholů F a D . Získáme vrcholy F'_{S3} a D'_{S3} , kde vrcholy $F'_{S3} = [4, 518; 3, 773; 0, 755]$ a $D'_{S3} = [3, 331; 4, 547; 1, 061]$. Na obrázku 18 můžeme vidět sklopenou stěnu 3.
- A konečně maticí $S4_{S1}$ přenásobíme souřadnice vrcholů E a D . Získáme vrcholy $E'_{S4} = [-0, 494; 1, 800; 0, 550]$ a $D'_{S4} = [0, 584; 3, 741; 1, 027]$. Na obrázku 19 můžeme vidět sklopenou stěnu 4, a tím i celou síť S . Viditelný plášť tělesa po jeho složení se momentálně nachází na spodní straně sítě tělesa. Pro samotný potisk musíme celou síť ještě otočit o 180 stupňů.
- Na obrázku 20 můžeme vidět síť tělesa.



Obrázek 18: Otočení stěny 3 do kořenové roviny



Obrázek 19: Otočení stěny 4 do kořenové roviny



Obrázek 20: Rozložená síť

7 Zálepky

Pro zjednodušení práce modelářů se používají zálepky (chlopně) spojující dohromady dvě sousedící stěny, které nejsou spolu v jedné síti s tělesem. Z duálního grafu sousedních stěn (obrázek 6) vezmeme vždy všechny hrany, které se neobjeví v grafu sítě S a na jejich místa budou patřit zálepky.

Pro správné umístění zálepek budeme pracovat s grafem sousednosti stěn. Pokud spolu dvě stěny nebudou sousedit v grafu sítě přímo, pak ke každé již vložené stěně, která sousedí s právě vkládanou stěnou, přidáme zálepky. Teprve po přidání zálepek testujeme, zda danou stěnu můžeme do sítě přidat. Pokud mají stěny společnou hranu v grafu sítě S , pak zálepky nepřidáváme.

Přidaný úhel na zálepku budeme vypočítávat podle délky hrany tělesa tak, že vezmeme třetinu délky a dopočteme úhel tak, aby strana trojúhelníku naproti našemu úhlu měla 2 mm , což je minimální šířka zálepky, jak se píše v kapitole 1.3. To uděláme pro obě strany a získáme tak minimální úhly. Maximální požívaný úhel je 45° , jak se také můžeme dočíst ve výše zmiňované kapitole.

Do výpočtu sítě budeme vždy vkládat co největší úhel, který můžeme přidat k danému vrcholu tělesa, nejméně však minimální úhel. Pokud stěnu ani v takovém případě nelze přidat, pak ji do sítě nevkládáme. Zálepky se tedy do sítě budou přidávat zároveň ve chvíli, kdy se stěnu pokusíme přidat do sítě poprvé.

Samotný tvar zálepky se musí také přizpůsobit stěně, na kterou se bude lepit. Pokud tedy minimální úhel bude vycházet větší, než jaký má námi vkládaná stěna u daného vrcholu, pak se jako minimální úhel vezme stejný úhel, jako má vkládaná stěna a zálepka se jí vždy přizpůsobí. Tvar vložené zálepky bude také vycházet z délky samotné strany. Buď bude dosahovat zkosená strana do její třetiny nebo bude kratší v závislosti na tom, zda zálepka není širší než její obvyklá šířka, tedy 7 mm , jak se také můžeme dočíst v kapitole 1.3.

Další možností, jak by bylo možné zálepky vkládat, je použít orientaci hrany grafu sítě a přidat zálepky na místo, odkud bude hrana vycházet. Nastává problém, že v některých případech, například u vnitřních stěn, by zálepku nemuselo být možné dodatečně přidat z důvodu překročení 360° .

8 Srovnávací kritérium různých sítí

Při rozkládání by bylo vhodné, aby spolu v grafu sítě S stěny sousedily co nejdelší hranou, protože jak každý modelář ví, čím méně lepidla je použito, tím méně se bude výsledný model deformovat. Druhou výhodou je také úspora lepidla, což modeláři také ocení. Tento postup však nelze vždy označit za nejlepší, protože by se mohlo stát, že při volbě sousednosti stěn v grafu sítě S podle nejdelších hran v tělese by mohlo vzniknout více komponent než při jiném rozložení.

Dalším srovnávacím kritériem je obsah části roviny, kterou daná síť zabírá zpravidla uvnitř listu papíru. Pro srovnání jednotlivých sítí vybereme jednoduší obrazec, do kterého síť celou vložíme. Síť by se dala například aproximovat opsanou kružnicí nebo obdélníkem či dokonce čtvercem.

Pro práci s papírem bude vhodnější síť vložit do obdélníků, které na sebe lépe navazují a dají se jednoduše sládat vedle sebe při rozložení na papír. Vypočteme maximální vzdálenost vrcholů sítě na ose x a maximální vzdálenost vrcholů na ose y . Vznikne nám obdélník, který nazveme například $ObdS$. Vypočteme obsah sítě a obsah obdélníku $ObdS$. Porovnáme oba obsahy a získáme efektivní poměr plochy sítě k ploše obdélníku.

Čím větší je efektivní poměr plochy, tím lepší rozložení sítě získáme. Pokud například rozložíme těleso na dvě různé sítě a efektivní poměr první z nich bude 10 % a druhé z nich bude 50 % pak lepší z obou rozložení bude druhé rozložení.

Pokud se těleso skládá z více sítí a sítě by se daly k sobě přiložit tak, aby efektivní poměr těchto sítí k obdélníku $ObdS$ byl větší než pro každou z nich zvlášť ku svému obdélníku, pak budeme volit obdélník, který má vyšší efektivní poměr a tedy obdélník pro více sítí, místo více obdélníků pro každou ze sítí zvlášť.

Při pečlivějším ručním zpracování můžeme jednotlivé sítě dílů otáčet tak, aby spolu zabíraly v $ObdS$ co nejvíce místa. Tento proces je však nad rámec této bakalářské práce.

9 Rozbor krychle s kvádrovým výřezem

Máme krychli s výřezem, které vidíme na obrázku 21. Souřadnice vrcholů tohoto tělesa jsou:

$$A = [0; 0; 0], B = [4; 0; 0], C = [4; 4; 0], D = [0; 4; 0]$$

$$E = [0; 0; 4], F = [4; 0; 4], G = [4; 4; 4], H = [0; 4; 4]$$

$$I = [0; 1; 1], J = [0; 3; 1], K = [0; 1; 3], L = [0; 3; 3]$$

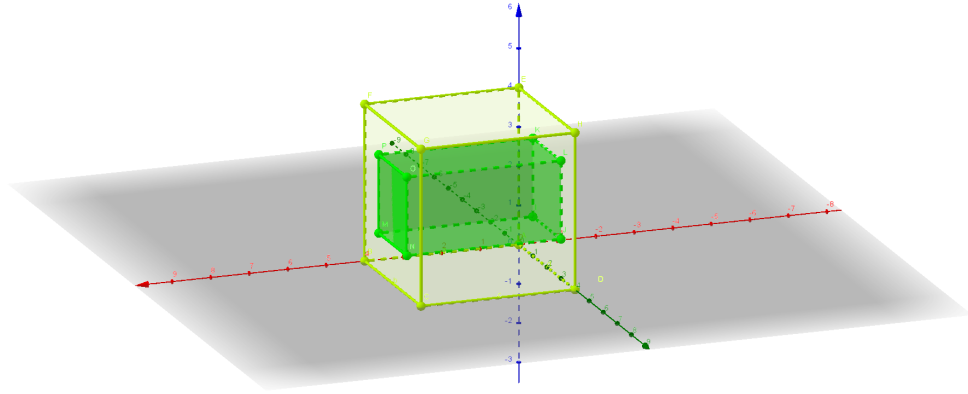
$$M = [4; 1; 1], N = [4; 3; 1], O = [4; 3; 3], P = [4; 1; 3]$$

Nyní projdeme celým procesem od kontroly konzistence přes sestavení grafu sousednosti stěn a jeho podgrafu, kterým je graf sítě tělesa, až k samotnému nalezení sítě tělesa. Na rozdíl od příkladu ze sekce 6, síť nemůže být z jednoho kusu (je tedy lesem, ne stromem). Ukážeme si, jak tuto vlastnost rozpoznat pomocí výše rozepsaných postupů.

9.1 Kontrola stěn

Nejprve zkontrolujeme, zda body zadané jako ohrazení stěny leží v jedné rovině, abychom věděli, že stěny jsou zadané správně:

- Zkoumáme stěnu 1, stěnu ABCD. Vezmeme rovinu ABC a doplňkový bod roviny F. Leží bod D v rovině ABC? Máme soustavu rovnic: $A[1]p_1 + B[1]p_2 + C[1]p_3 + F[1]p_4 = D[1]$, $A[2]p_1 + B[2]p_2 + C[2]p_3 + F[2]p_4 = D[2]$, $A[3]p_1 + B[3]p_2 + C[3]p_3 + F[3]p_4 = D[3]$ a $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Po výpočtu p_1 až p_4 budou koeficienty $p_1 = 1$, $p_2 = -1$, $p_3 = 1$ a $p_4 = 0$. Protože p_4 je nulové a proměnná p_4 jsou od bodu F, který je doplňkovým bodem roviny ABC, tak bod D leží v rovině ABC.
- Zkontrolujeme stěnu 2, což je stěna ABEF. Vezmeme rovinu ABF a doplňkový bod roviny C. Leží bod E v rovině ABF? Máme soustavu rovnic: $A[1]p_1 + B[1]p_2 + C[1]p_3 + F[1]p_4 = E[1]$, $A[2]p_1 + B[2]p_2 + C[2]p_3 + F[2]p_4 = E[2]$, $A[3]p_1 + B[3]p_2 + C[3]p_3 + F[3]p_4 = E[3]$ a $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Po výpočtu p_1 až p_4 budou koeficienty $p_1 = 1$, $p_2 = -1$, $p_3 = 0$ a $p_4 = 1$. Protože p_3 je nulové a proměnná p_3 je od bodu C, který je doplňkovým bodem roviny ABF, tak bod E leží v rovině ABF.
- Prověříme stěnu 3, stěnu BCFG. Vezmeme rovinu BCF a doplňkový bod roviny zvolíme A. Leží bod G v rovině BCF? Máme soustavu rovnic: $A[1]p_1 + B[1]p_2 + C[1]p_3 + F[1]p_4 = G[1]$, $A[2]p_1 + B[2]p_2 + C[2]p_3 + F[2]p_4 = G[2]$, $A[3]p_1 + B[3]p_2 + C[3]p_3 + F[3]p_4 = G[3]$ a $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Po výpočtu p_1 až p_4 budou koeficienty $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = 1$ a $p_4 = 1$. Proměnná p_1 je nulová a je od doplňkového bodu A, proto bod D leží v rovině ABC.



Obrázek 21: Těleso, které rozkládáme na síť

- Zkontrolujeme stěnu 4, kterou je CDGH. Vezmeme rovinu CDH a doplňkový bod roviny zvolíme A. Leží bod G v rovině CDH? Máme soustavu rovnic: $A[1]p_1 + D[1]p_2 + C[1]p_3 + H[1]p_4 = G[1]$, $A[2]p_1 + D[2]p_2 + C[2]p_3 + H[2]p_4 = G[2]$, $A[3]p_1 + D[3]p_2 + C[3]p_3 + H[3]p_4 = G[3]$ a $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Po výpočtu p_1 až p_4 budou koeficienty $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = 1$ a $p_4 = 1$. Proměnná p_1 je nulová a je od doplňkového bodu A, proto bod G leží v rovině CDH.
- Prověříme stěnu 5, kterou je stěna ADEH. Vezmeme rovinu ADH a doplňkový bod C. Leží bod E v rovině ADH? Máme soustavu rovnic: $A[1]p_1 + D[1]p_2 + C[1]p_3 + H[1]p_4 = E[1]$, $A[2]p_1 + D[2]p_2 + C[2]p_3 + H[2]p_4 = E[2]$, $A[3]p_1 + D[3]p_2 + C[3]p_3 + H[3]p_4 = E[3]$ a $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Po výpočtu p_1 až p_4 budou koeficienty $p_1 = 1$, $p_2 = -1$, $p_3 = 0$ a $p_4 = 1$. Proměnná p_3 je nulová a je od doplňkového bodu C, proto bod E leží v rovině ADH.
- Ověříme stěnu 6, kterou je stěna EFGH. Vezmeme rovinu EFG a doplňkový bod C. Leží bod H v rovině EFG? Máme soustavu rovnic: $E[1]p_1 + F[1]p_2 + C[1]p_3 + G[1]p_4 = H[1]$, $E[2]p_1 + F[2]p_2 + C[2]p_3 + G[2]p_4 = H[2]$, $E[3]p_1 + F[3]p_2 + C[3]p_3 + G[3]p_4 = H[3]$ a $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Po výpočtu p_1 až p_4 budou koeficienty $p_1 = 1$, $p_2 = -1$, $p_3 = 0$ a $p_4 = 1$. Proměnná p_3 je nulová a je od doplňkového bodu C, proto bod H leží v rovině EFG.
- Zkontrolujeme stěnu 7, stěnu JLON. Vezmeme rovinu JLO a doplňkový bod A. Leží bod N v rovině JLO? Máme soustavu rovnic: $A[1]p_1 + J[1]p_2 + L[1]p_3 + O[1]p_4 = N[1]$, $A[2]p_1 + J[2]p_2 + L[2]p_3 + O[2]p_4 = N[2]$, $A[3]p_1 + J[3]p_2 + L[3]p_3 + O[3]p_4 = N[3]$ a $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 =$

1. Po výpočtu p_1 až p_4 budou koeficienty $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = -1$ a $p_4 = 1$. Proměnná p_1 je nulová a je od doplňkového bodu A, proto bod N leží v rovině JLO.

- Prověříme stěnu 8, kterou je stěna KLOP. Vezmeme rovinu KLO a doplňkový bod A. Leží bod P v rovině KLO? Máme soustavu rovnic: $A[1]p_1 + K[1]p_2 + L[1]p_3 + O[1]p_4 = P[1]$, $A[2]p_1 + K[2]p_2 + L[2]p_3 + O[2]p_4 = P[2]$, $A[3]p_1 + K[3]p_2 + L[3]p_3 + O[3]p_4 = P[3]$ a $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Po výpočtu p_1 až p_4 budou koeficienty $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = -1$ a $p_4 = 1$. Proměnná p_1 je nulová a je od doplňkového bodu A, proto bod P leží v rovině KLO.
- Zkontrolujeme stěnu 9, kterou je stěna KPML. Vezmeme rovinu KMI a doplňkový bod A. Leží bod P v rovině KMI? Máme soustavu rovnic: $A[1]p_1 + K[1]p_2 + M[1]p_3 + I[1]p_4 = P[1]$, $A[2]p_1 + K[2]p_2 + M[2]p_3 + I[2]p_4 = P[2]$, $A[3]p_1 + K[3]p_2 + M[3]p_3 + I[3]p_4 = P[3]$ a $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Po výpočtu p_1 až p_4 budou koeficienty $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = -1$ a $p_4 = 1$. Proměnná p_1 je nulová a je od doplňkového bodu A, proto bod P leží v rovině KMI.
- Ověříme poslední, desátou stěnu, kterou je stěna MINJ. Vezmeme rovinu MIJ a doplňkový bod A. Leží bod N v rovině MIJ? Máme soustavu rovnic: $A[1]p_1 + J[1]p_2 + M[1]p_3 + I[1]p_4 = N[1]$, $A[2]p_1 + J[2]p_2 + M[2]p_3 + I[2]p_4 = N[2]$, $A[3]p_1 + J[3]p_2 + M[3]p_3 + I[3]p_4 = N[3]$ a $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Po výpočtu p_1 až p_4 budou koeficienty $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$ a $p_4 = -1$. Proměnná p_1 je nulová a je od doplňkového bodu A, proto bod N leží v rovině MIJ.

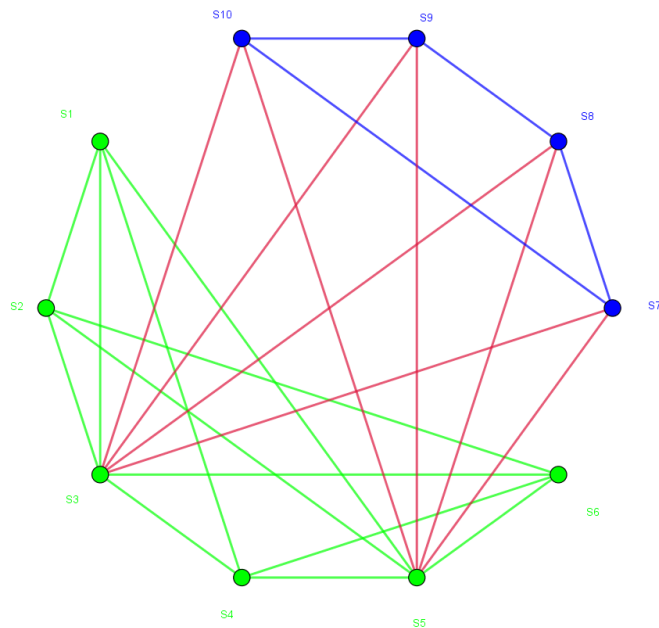
9.2 Rozpoznání sousednosti stěn

Budeme postupně procházet vrcholy jednotlivých stěn pomocí algoritmu z kapitoly 4.1. Sestavíme jejich graf tak, že každé dvě sousední stěny jsou spojeny hranou v grafu sousednosti stěn.

Nyní jsme získali graf sítě sousednosti, který vidíme na obrázku 22. Zelenými hranami a vrcholy jsou spojeny stěny krychle označeny S1 – S6, což je vnější plášť krychle. Modře máme označenou sousednost stěn v okně, která je uvnitř naší krychle a červenými hranami máme označeny hrany v tělese, které spolu sousedí, ale nelze je využít pro síť tělesa, protože stěny S7 – S10 nelze vložit do otvoru ve stěně S3 ani do otvoru ve stěně S5, kvůli jejich velikosti. Tento problém je popsán v kapitole 5.3. Vidíme tedy graf sousednosti stěn, ve kterém máme problémové hrany označeny červeně a dvě komponenty, které jsou jimi spojeny, označeny modře a zeleně.

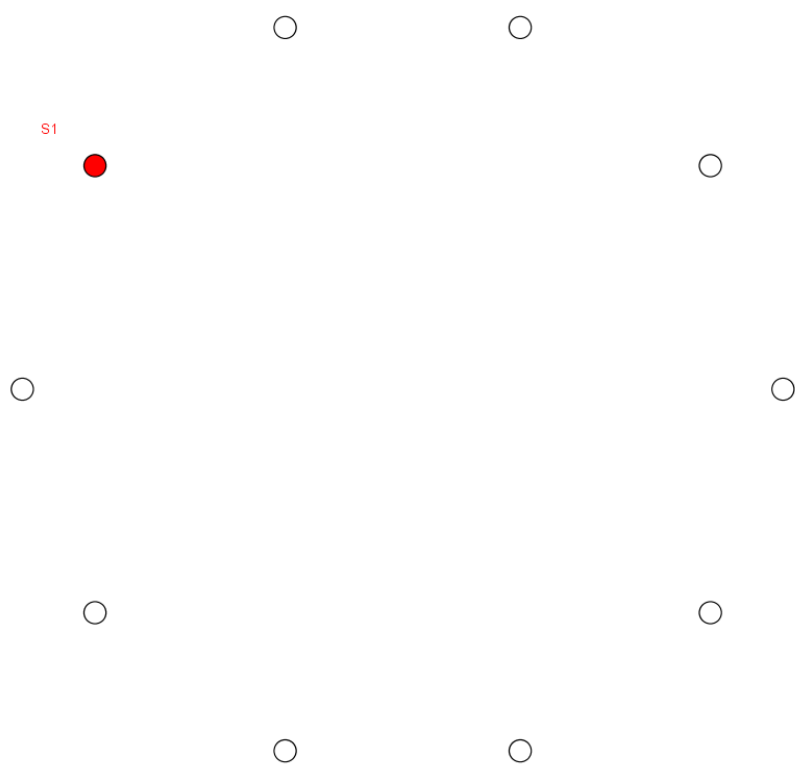
9.3 Sestavení grafu sítě

Nyní ukážeme, jak v grafu sousednosti stěn tělesa nalezneme podgraf, který popisuje síť tělesa. Protože síť nebude souvislá, nejedná se o kořenový strom, ale o les, ve kterém každá komponenta má svůj kořen.

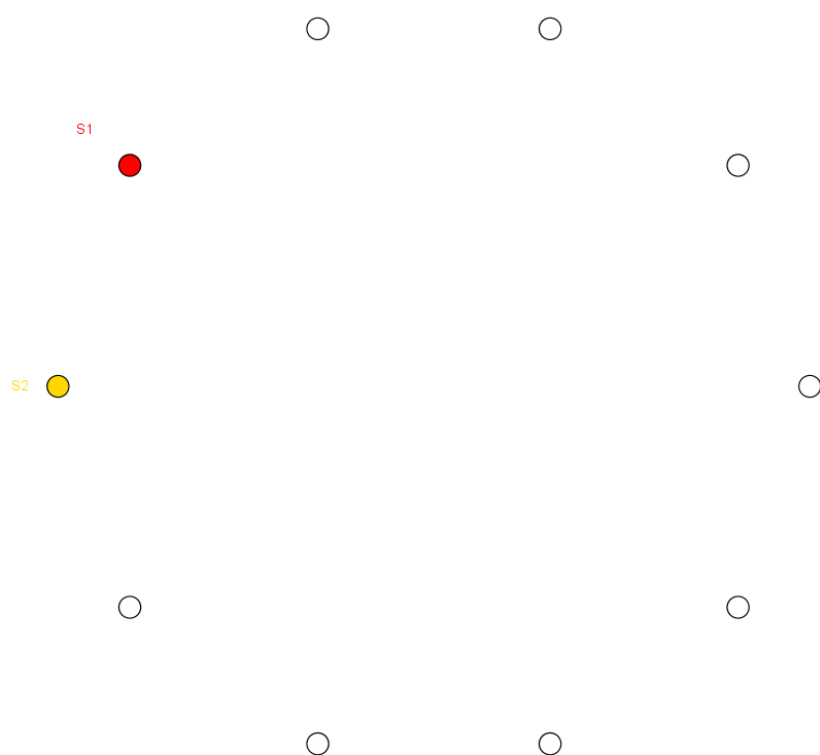


Obrázek 22: Graf sousednosti stěn

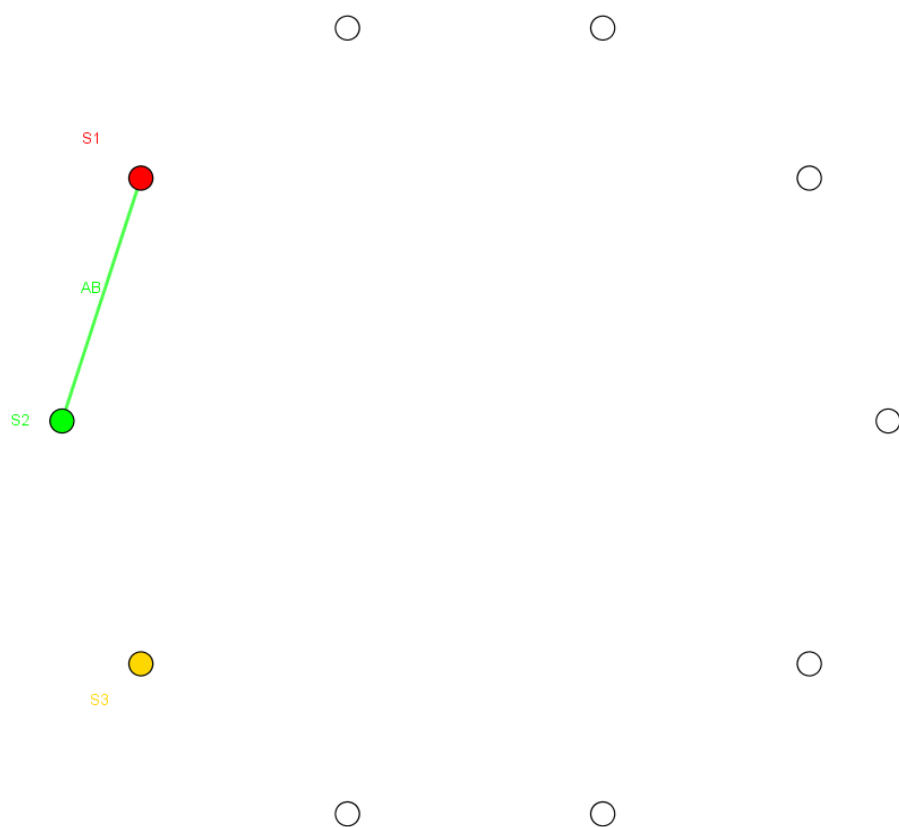
1. Zvolíme kořen grafu, například vrchol například S1. Jak můžeme vidět na obrázku 23.
2. Zvolíme vrchol, se kterým vrchol S1 sousedí, například vrchol S2. Stěny spolu v tělese sousedí přes hranu tělesa AB. $S1_A + S2_A < 360^\circ$ a $S1_B + S2_B < 360^\circ$, přidáme hranu s názvem AB. Jak můžeme vidět na obrázku 24.
3. Dalším sousedem s kořenem S1 je hrana S3, ty spolu sousedí v grafu tělesa přes hranu BC $S1_B + S2_B + S3_B < 360^\circ$ a $S1_C + S3_C < 360^\circ$, vložíme hranu BC. Jak můžeme vidět na obrázku 25.
4. Dalším vrcholem sousedícím v duálním grafu s kořenem je vrchol S4. $S1_D + S4_D < 360^\circ$ a $S1_C + S3_C + S4_C < 360^\circ$, vložíme hranu DC. Jak můžeme vidět na obrázku 26.
5. Posledním sousedem kořene je stěna S5. $S1_A + S2_A + S5_A < 360^\circ$ a $S1_D + S4_D + S5_D < 360^\circ$, vložíme hranu mezi vrcholy S1 a S5 a nazveme ji hranou AD. Jak můžeme vidět na obrázku 27.
6. Kořen S1 již nemá žádné sousedy, označíme tedy jeden z již vložených vrcholů například vrchol S2. Projdeme sousední vrcholy v duálním grafu a zkontrolujeme, zda některý z jeho sousedů ještě nemáme vložený. Vezmeme vrchol S6, který sousedí s vrcholem S2 a není jako jediný vložen do grafu sítě S a zkontrolujeme, zda můžeme vložit hranu. $S2_E + S6_E < 360^\circ$ a $S2_F + S6_F < 360^\circ$, vložíme hranu EF. s tímto vrcholem jsou vloženy všechny sousední vrcholy S2. Jak můžeme vidět na obrázku 28.



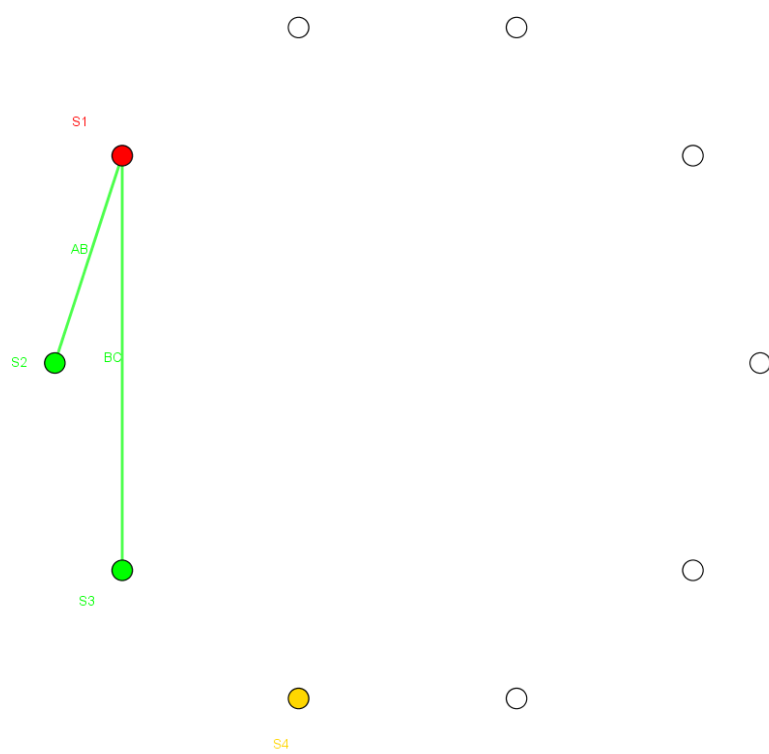
Obrázek 23: Kořen grafu $S1$



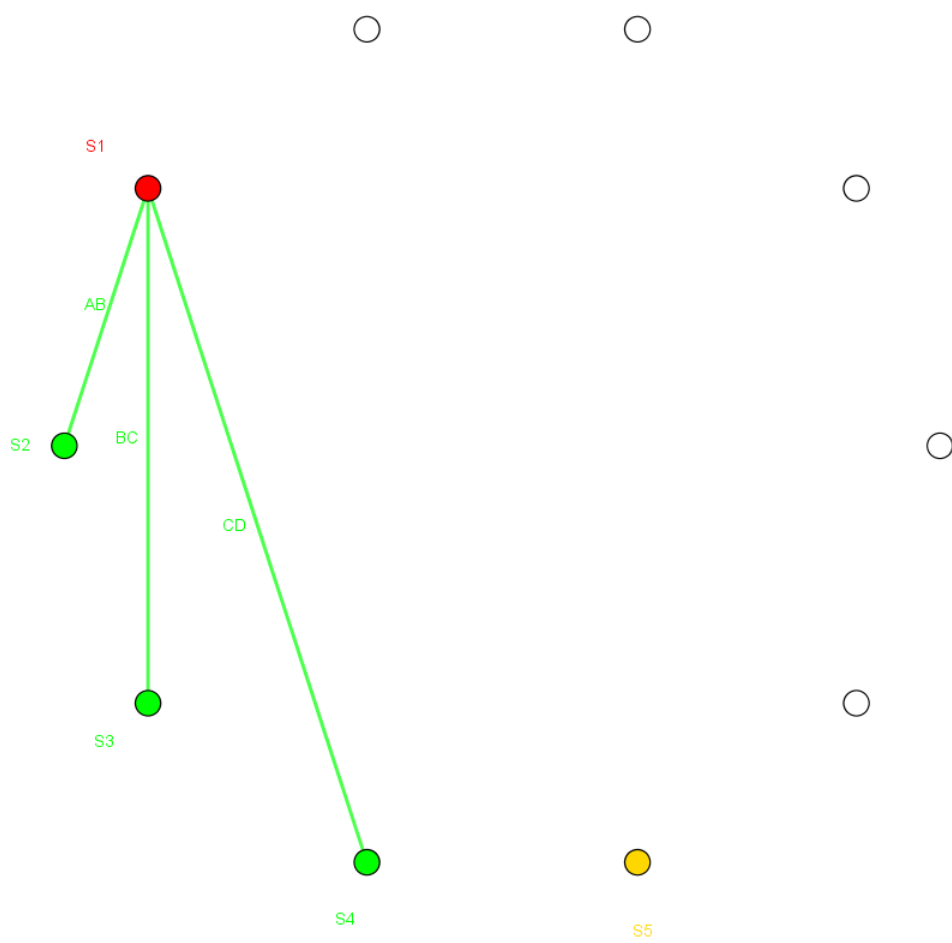
Obrázek 24: Kořen vrcholu S1 a označený vrchol S2



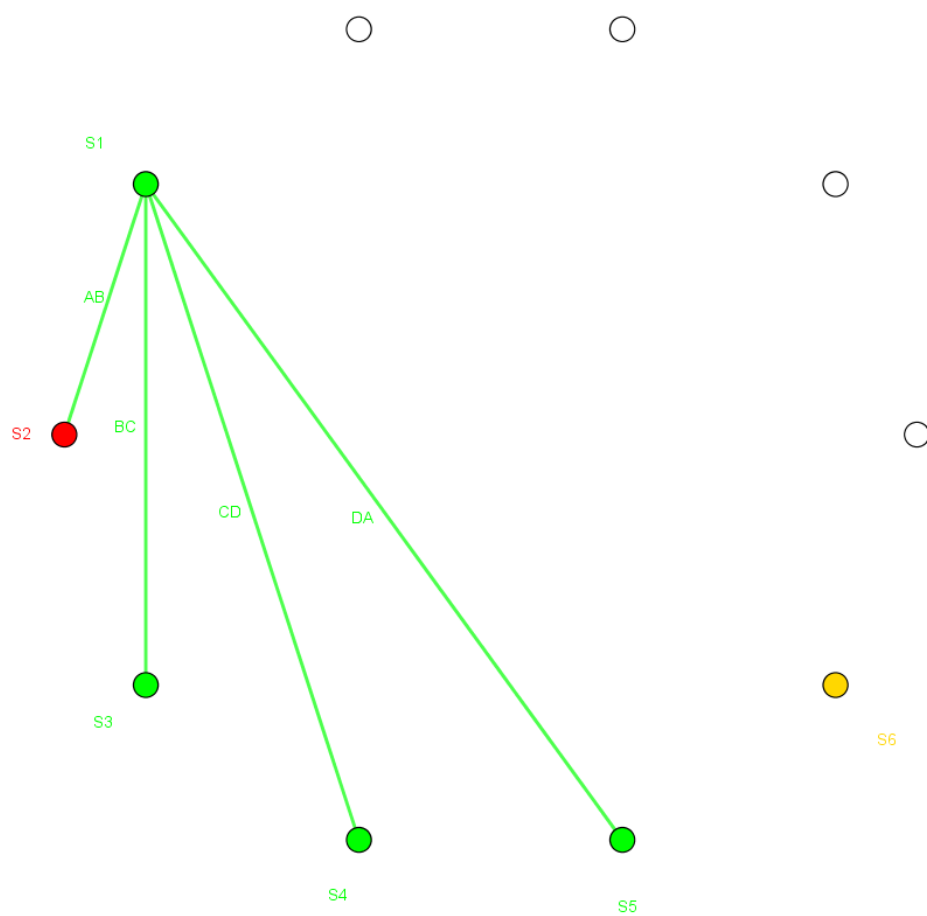
Obrázek 25: Vložená hrana AB a označený vrchol S3



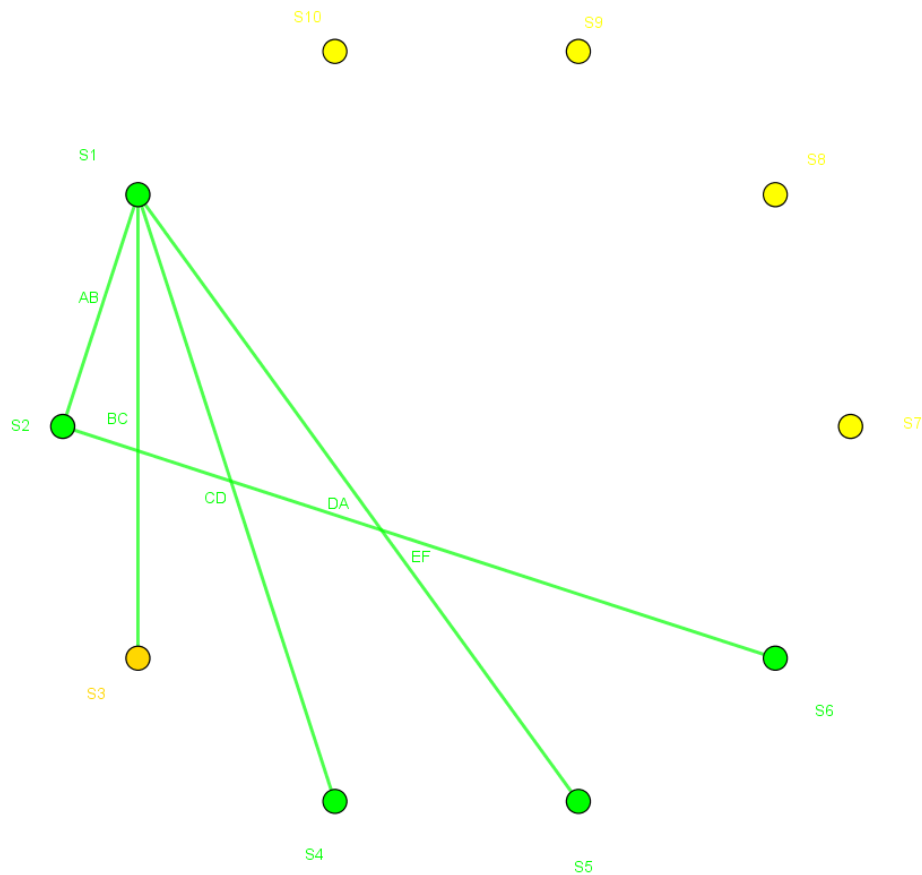
Obrázek 26: Vložené hrany AB a BC a označený vrchol S4



Obrázek 27: Vložené hrany AB, BC, CD a označený vrchol S5

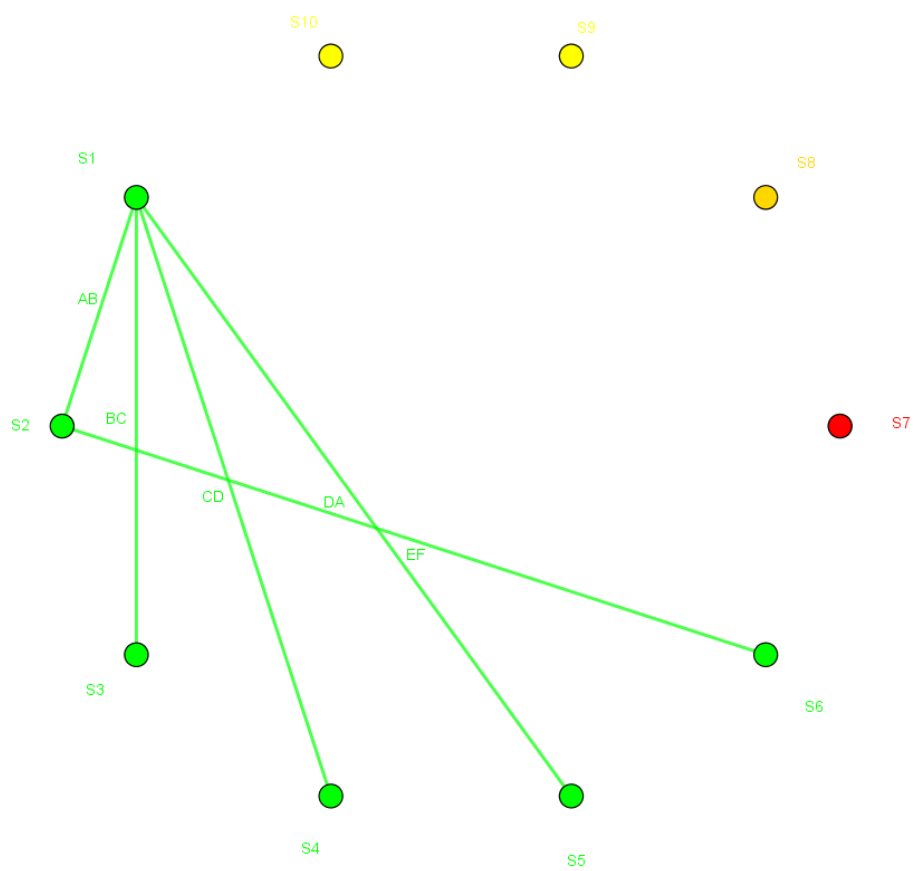


Obrázek 28: Vložené hrany AB, BC, CD, DA a označený vrchol S6

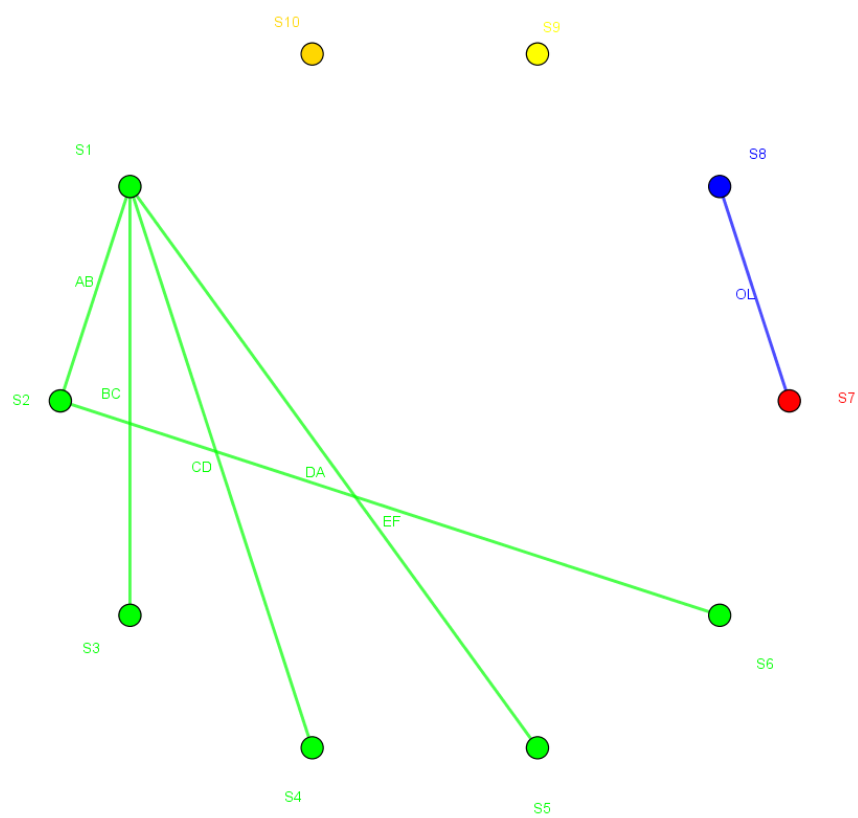


Obrázek 29: Vložené hrany AB až EF a označený vrchol S3

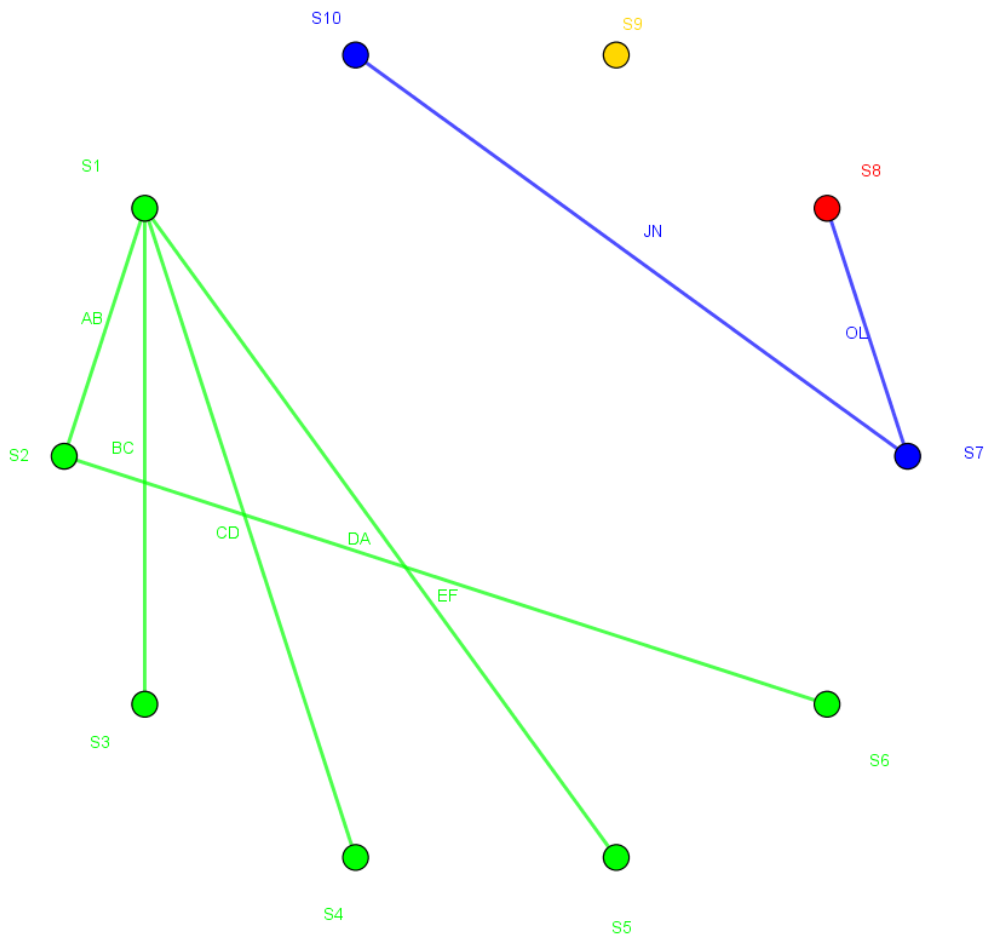
7. Označíme další vrchol, například vrchol S3 a zkontrolujeme nevložené stěny, které sousedí se stěnou S3. Nyní nastává problém. Na základě úhlů by se zdálo, že je možné vložit ještě dvě stěny, které by v krychli v „okénku“ byly naproti sobě. Konflikt nastává hned ve dvou okamžicích, kdykoli bychom chtěli vložit jednu z dalších stěn, ale také při následné konstrukci samotné stěny, protože jsou všechny nevložené stěny příliš velké. Tudíž tyto stěny vložíme do druhé sítě. Jak můžeme vidět na obrázku 29.
8. Žádnou další stěnu nelze přidat, proto vybereme nový kořen a vytváříme novou komponenti grafu sítě S. Označíme stěnu S7 jako nový kořen a označíme její sousední stěnu S8, se kterou sousedí v tělese hranou OL. $S7_O + S8_O < 360^\circ$ a $S7_L + S8_L < 360^\circ$, vložíme hranu OL. Jak můžeme vidět na obrázku 30.
9. Označíme další sousední stěnu S10, se kterou sousedí v tělese hranou JN. $S7_J + S10_J < 360^\circ$ a $S7_N + S10_N < 360^\circ$, vložíme hranu JN. Jak můžeme vidět na obrázku 31



Obrázek 30: Kompletní komponenta grafu sítě a nově označený kořen S7



Obrázek 31: Kompletní komponenta grafu sítě a vložená hrana OL a označený vrchol S10



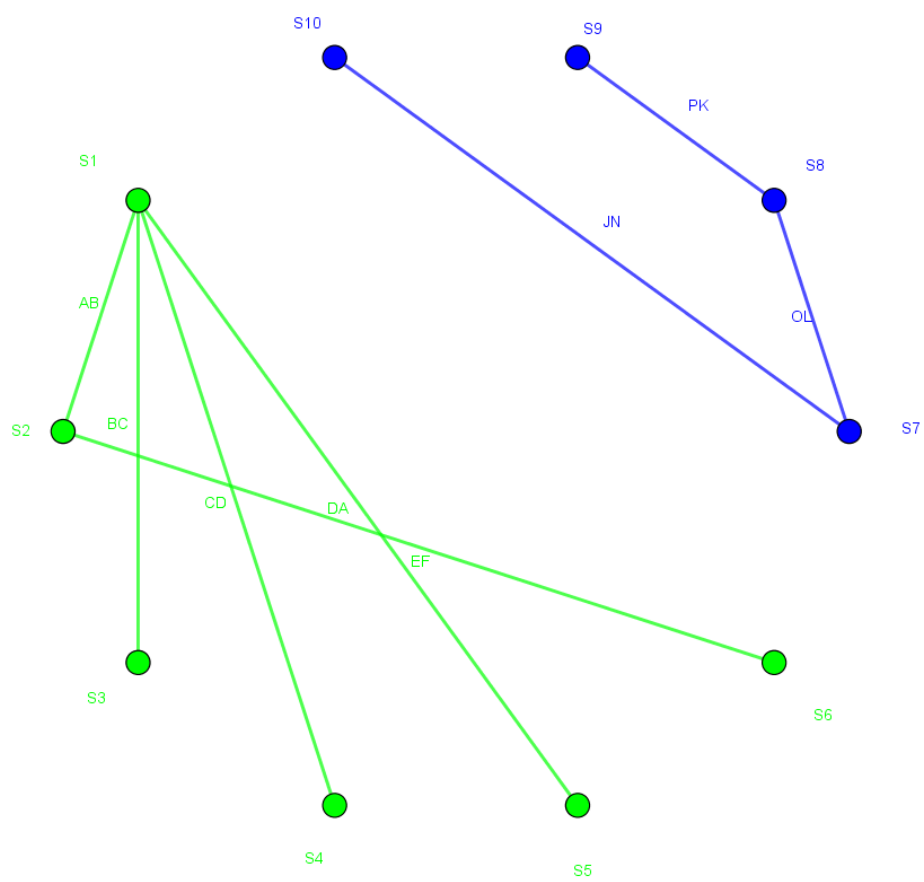
Obrázek 32: Kompletní komponenta grafu sítě a vložená hrana OL, JN a označený vrchol S9

10. Máme vložený všechny vrcholy, které v duálním grafu sousedí se stěnou S7, vybereme sousedí v tělese hranou PK. $S8_P + S9_P < 360^\circ$ a $S8_K + S9_K < 360^\circ$, vložíme hranu PK a máme kompletní graf sítě S. Jak můžeme vidět na obrázku 32.

9.4 Rozložení tělesa na síť

Vypočteme jednotlivé normály všech deseti stěn, přičemž musíme dát pozor na správnou orientaci normál. Například normála stěny 1 míří stejným směrem jako normála stěny 8 a obě normály míří směrem do záporné z-tové souřadnice. Když máme spčítané všechny normály, tak spočteme všechny úhly, o které klopíme. Všechny úhly budou 90° .

Nyní spočítáme matice otočení pro jednotlivé stěny.



Obrázek 33: Kompletní graf sítě

$$\bullet S2_{S1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet S6_{S2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet S3_{S1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet S4_{S1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

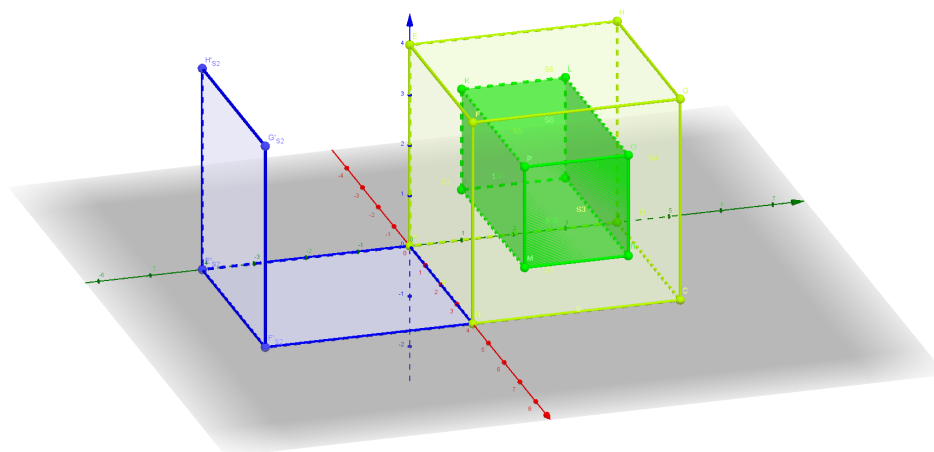
$$\bullet S5_{S1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet S8_{S7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet S9_{S8} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet S10_{S7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

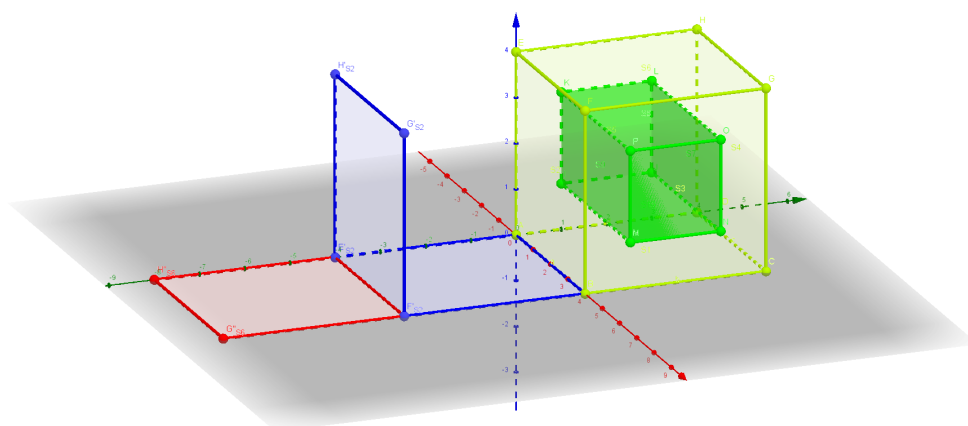
V maticích se nevyskytují zlomky, protože otáčíme o 90° nebo o 180° . Nyní sklopíme jednotlivé vrcholy do sítě 1 do kořenové stěny, která leží v rovině sA a vrcholy do I, J, K, L, M, N, O, P do roviny sítě 2 s kořenovou stěnou ležící v rovině sB, která odpovídá stěně 7.



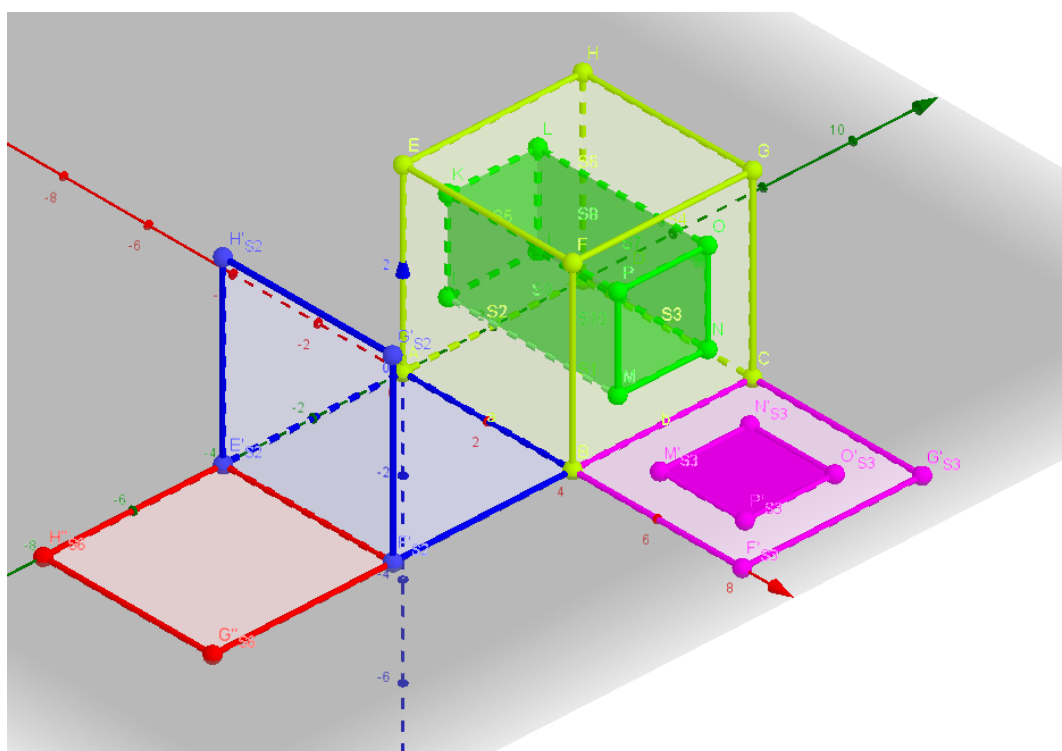
Obrázek 34: Sklopená stěna S_2 do roviny stěny sA a otočená stěna S_6

Začneme stěnou S_2 , kterou sklopíme do roviny sA a otočíme také stěnu S_6 , jak vidíme na obrázku 34. Dále budeme pokračovat tak, že přenásobíme maticí S_6S_2 vektory odpovídající vrcholům na nově sklopené stěně S_6' do roviny sA , jak vidíme na obrázku 35. Stěny S_2 a S_6 jsou v rovině sA , nyní sklopíme stejným způsobem stěnu S_3 . Přenásobíme jednotlivé vektory odpovídající vrcholům stěny S_3 a získáme obrázek 36. Sklopíme i stěnu S_4 tak, že její jednotlivé vektory odpovídající vrcholům přenásobíme maticí S_4S_1 . Výsledek po sklopení můžeme vidět na obrázku 37. Nyní sklopíme poslední z vnějších stěn, stěnu S_5 do roviny sA , jak vidíme na obrázku 38. Nyní máme rozloženou síť sA a začneme rozkládat síť do roviny sB .

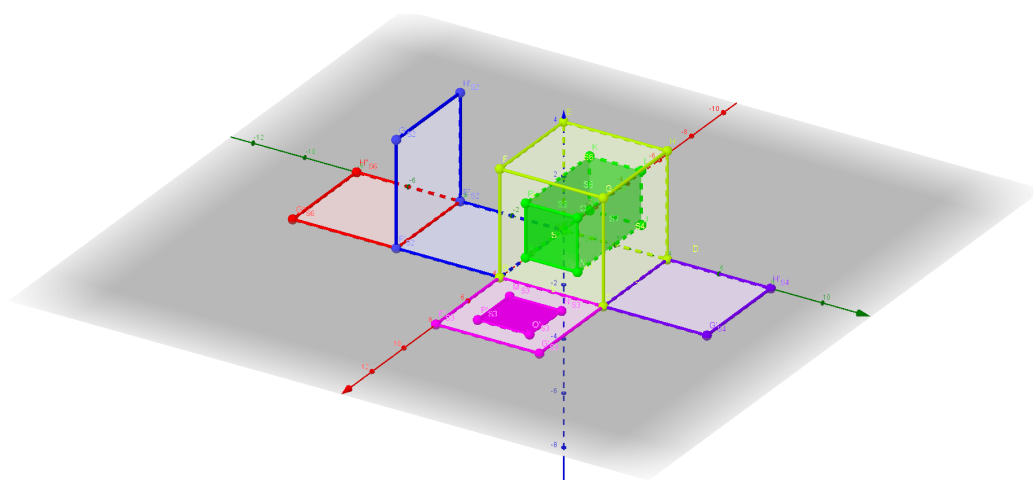
Sklopíme stěnu S_8 a stěnu S_{10} maticí S_8S_7 . Stěna S_8 se nyní nachází v rovině sB a dostaneme stěnu S_{10}' jak můžeme vidět na obrázku 39. Nyní sklopíme stěnu S_{10}' do roviny sB , to můžeme vidět na obrázku 40. A konečně sklopíme poslední stěnu, stěnu S_9 , do roviny sB . Tímto krokem jsme získali dvě rozložené části sA a sB , jak můžeme vidět na obrázku 41. Tím máme rozložené celé těleso, síť můžeme vidět na obrázku 42.



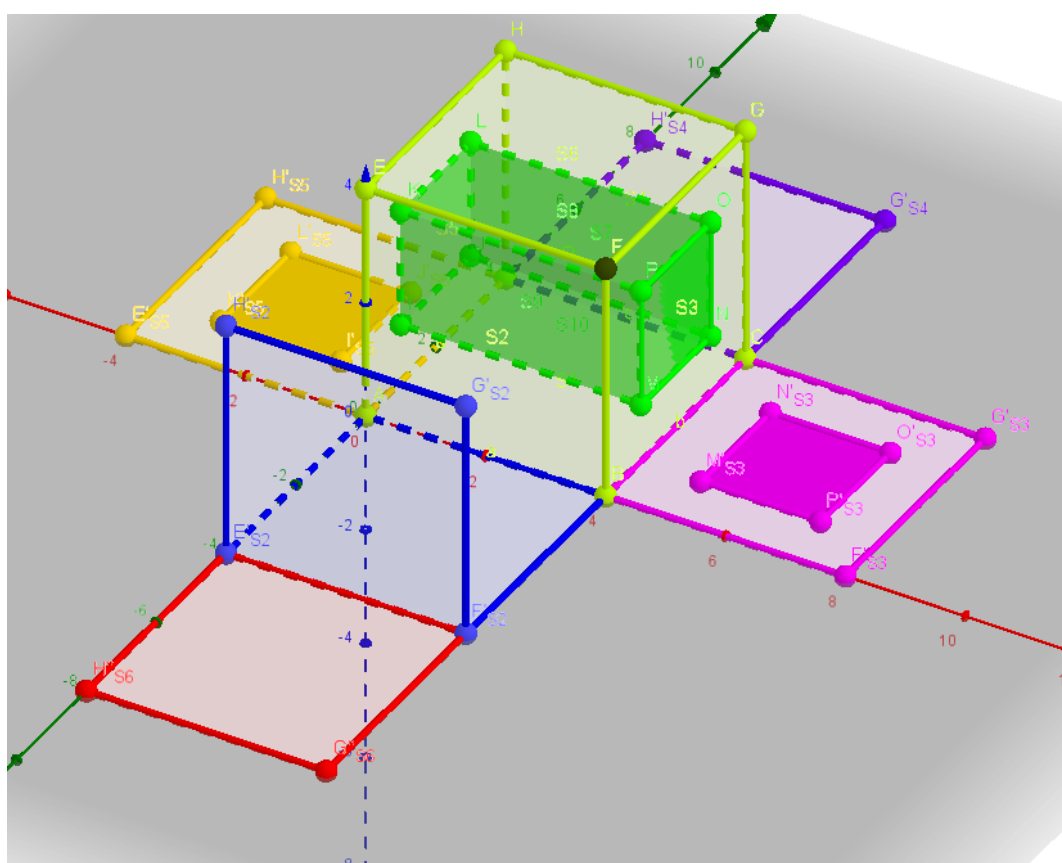
Obrázek 35: Sklopená stěna S6 do roviny sA



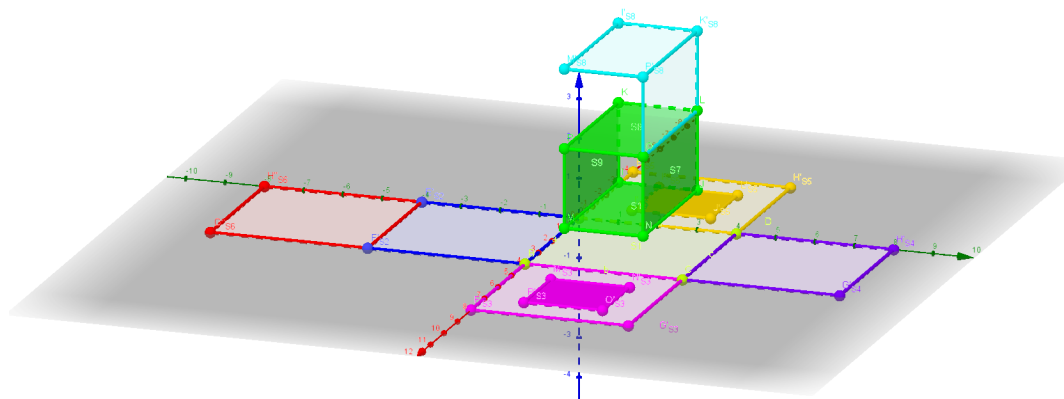
Obrázek 36: Sklopená stěna S3 do roviny stěny sA



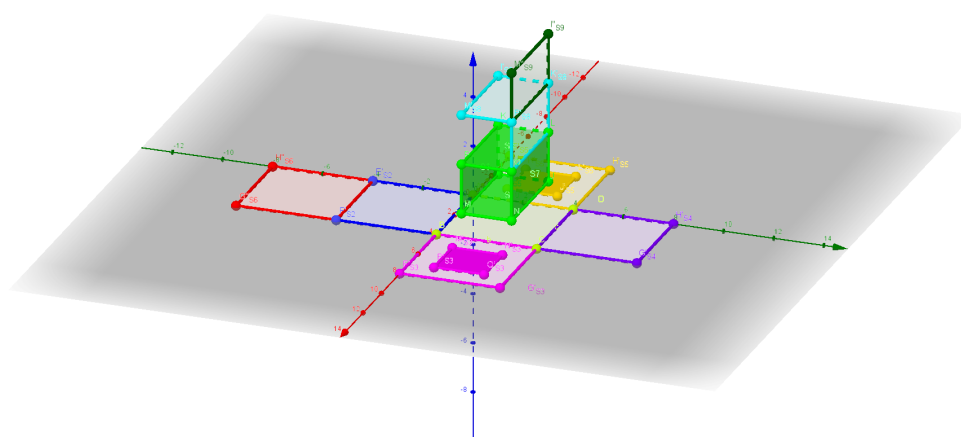
Obrázek 37: Sklopená stěna S4 do roviny stěny sA



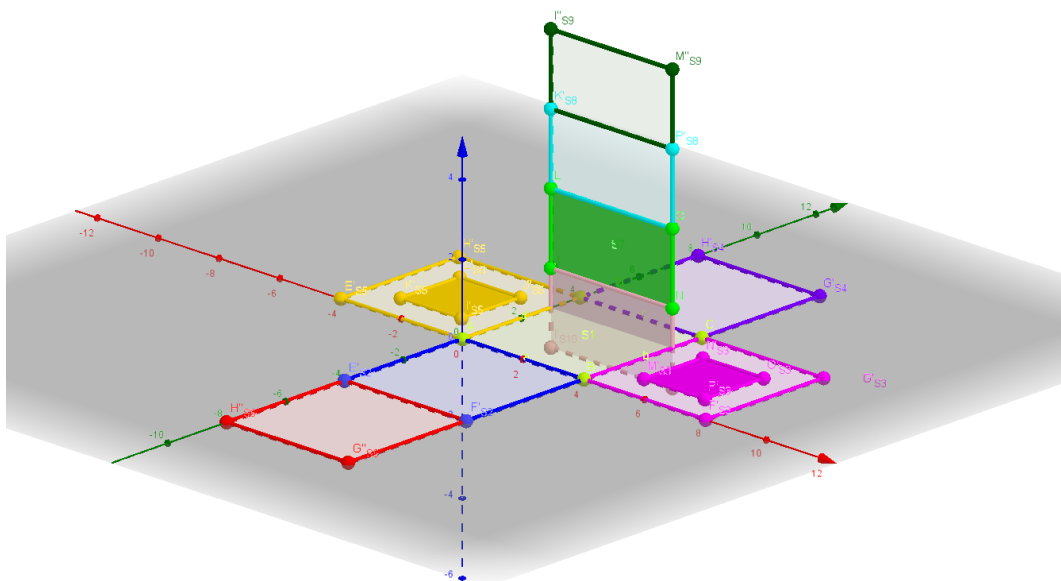
Obrázek 38: Sklopená stěna S5 do roviny stěny sA



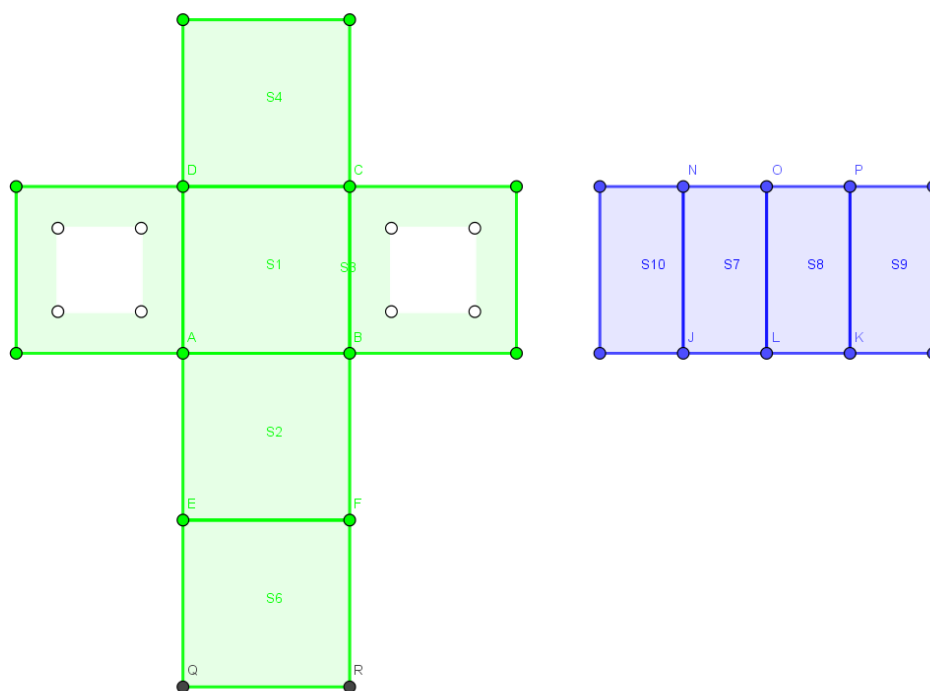
Obrázek 39: Sklopená stěna S8 do roviny stěny sB



Obrázek 40: Sklopená stěna S9 do roviny stěny sB



Obrázek 41: Sklopená stěna S10 do roviny stěny sB



Obrázek 42: Rozložená síť tělesa

10 Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo rozebrat jednotlivé matematické postupy, kterými rozložíme těleso na síť, což se podařilo splnit. Mimo hlavního cíle se práce zabývá tím, co je a co není možné slepit z papíru. Práce také obsahuje přehled známých problémů a jejich řešení (viz. kapitola 5.3) a porovnání vhodnosti různých rozvinutí jednotlivých sítí.

U tělesa, které chceme rozložit na síť, nejdříve zkontrolujeme, zda splňuje počáteční podmínky (tj. všechny stěny jsou správně definovány). Budeme pokračovat rozvinutím tělesa na síť. K tomu nám bude sloužit obecný postup, který však nepracuje zcela automaticky. Problémovou částí je sestavení grafu sítě, který je podgrafem grafu sousednosti stěn, protože postup není zcela jednoznačný a záleží mimo jiné na zvolené kořenové stěně tělesa. Z tělesa tak dokážeme vyrobit síť pro model i pro papírovou vystřihovanku, což bylo hlavním bodem zadání.

Porovnání vhodnosti různých rozvinutí do roviny jsme se věnovali v kapitole 8, kde se snažíme, aby daná síť zabírala co nejméně místa na papíře. Problematikou tohoto bodu je ovšem estetické rozmístění sítí na papíře, které už samotné by mělo zaujmout modelářovu pozornost, aby měl chuť si daný model slepit. Estetické cítění ještě není možné počítačem naučit, takže nejvýhodnějším řešením je, aby výsledná síť zabírala co nejméně místa na papíru.

Papírovým modelům se v obdobné práci věnoval Tomáš Chromčák. Oproti jeho práci [6] se však tato práce zaměřuje na papírové modely z matematického pohledu a ne z pohledu dostupného softwaru, který lze pro sestavení papírového modelu využít.

Práce je zaměřená na papírové modely, ale stejný postup lze použít také pro sestavení papírové vystřihovanky, které se od papírového modelu liší přidanými záplekami. Papírové vystřihovanky je tudíž pro modeláře jednodušší převést do jejich 3D podoby, protože získají větší spojovou plochu, čímž jsou také na rozdíl od papírových modelů stabilnější a jejich realizace snadnější.

Pro rozložení papírové vystřihovanky jsme nejprve zkontrolovali správnost vstupu pomocí určení umístění bodu v barycentrických souřadnicích (zda všechny vrcholy stěny leží v jedné rovině). Následně jsme sestavili graf sousednosti stěn, ze kterého jsme sestavili graf sítě. V grafech názorněji vidíme propojení jednotlivých stěn, ať už provázání jednotlivých hran v tělese nebo jak spolu budou stěny sousedit v grafu sítě. Podle grafu sítě jsme sklopili pomocí homogenních souřadnic jednotlivé stěny do jedné roviny. Potištěná strana sítě se po rozložení může nacházet na spodní straně sítě (závisí na orientaci potisku na kořenové stěně). V takovém případě, abychom mohli tedy texturu natisknout (dokreslit), musíme ještě celou síť překlopit o 180° .

Pro lepší názornost celou práci provází ilustrační obrázky vytvořené ve volně dostupném programu Geogebra.

Některé části algoritmu jsou deterministické a některé nedeterministické, u těch se musíme rozhodnout kterou cestu zvolit. Dokážeme snadno určit v jaké části roviny (prostoru) se bod nachází pomocí využití barycentrických souřadnic. Také dokážeme zjistit z kolika kusů se bude výsledná síť skládat a sklopit stěny do jedné roviny. Nedeterministické už je však samotné

rozložení sítě, kdy existuje více možností, kam danou stěnu umístit. Algoritmus může těleso rozvinout více způsoby a až po rozvinutí do roviny testujeme, které rozložení je nejvýhodnější z hlediska obsahu plochy, kterou zabírá obdélník či čtverec, do kterého je vložený.

Za papírovými modely a vystřihávkami bychom ale i dnes, ve světě počítačů, měli vidět prvky lidskosti a ne jen strojové dokonalosti. Budeme-li pracovat při konstrukci více s matematikou a všechny výpočty nám provede počítač, měli bychom v posledním kroku vzít papír, tužku a pravítko a celý model nebo vystřihovávku přivést na svět vlastní rukou podobně jako Ing. Vyškovský. Zanecháme na něm vlastní nedokonalosti, které tento model přivedou k dokonalosti.

Na téma bakalářské práce je možno navázat: můžeme se zabývat například algoritmy pro vhodné rozmístění stěn na papír a zvolení té nejvýhodnější sítě. Pokud autor modelu tělesa udělá chybu v zadání stěn (některé hrany se protínají a nemají společný bod), je možné některé chyby odhalit a opravit. Síť by neměla být větší než papír, na který ji budeme tisknout. Také zatím není řešen případ, kdy se po rozkladu tělesa na síť překrývají stěny, které spolu nesousedí. Některé jejich hrany jsou příliš dlouhé, a tak velikostně přesahují místo, které mají v síti vyhrazeno. Tento problém jsme schopni detekovat po rozložení tělesa na síť pomocí protínání hran sítě a umístění jednotlivých vrcholů, ale nedetekujeme jej při sestavování grafu sítě.

Literatura

- [1] Vystřihovánky a papírové modely | Kreativnínapady.cz. Kreativnínapady.cz | Kreativní nápady, dárky, tvoření, mozaiky, vystřihovánky, papírové modely [online]. Copyright © [cit. 04.02.2019]. Dostupné z: <http://www.kreativnínapady.cz/vystrihovanky/>
- [2] Richard Vyškovský – fenomén – Papírová archeologie. Papírová archeologie – historie vystřihovánek a papírových modelů [online]. Copyright © [cit. 2019-03-11] Dostupné z: <http://www.papirovaarcheologie.cz/profilu-autoru/richard-vyskovsky/fenomen-vyskovsky/>
- [3] Transformations in Homogeneous Coordinates. Iastate [online]. Iowa state university: Com s 477/577, 2018 [cit. 2019-03-11]. Dostupné z: <http://web.cs.iastate.edu/~cs577/handouts/homogeneous-transform.pdf>
- [4] HRON, Lukáš. Hledám zmizelé příběhy, říká tvůrce legendárních papírových modelů. Hobby.cz [online]. magazín Víkend: MF DNES, 2019 [cit. 2019-03-17]. Dostupné z: https://www.idnes.cz/hobby/dilna/architekt-richard-vyskovsky-legenda-papirove-vystrihovanky-vystrihovanka-papir-model.A190311_162615_hobby-dilna_mce
- [5] KAŠPAR, Petr. Tvorba vlastní vystřihovánky: Návod na tvorbu modelů z papíru. Praha, 2019, 17 s.[cit. 2019-03-26] Dostupné také z: <http://15122.fa.cvut.cz/?page=cz,elektronicka-skripta>. Elektronická skripta. ČVUT.
- [6] CHROMČÁK, Tomáš. Programy pro tvorbu papírových vystřihovánek. Zlín, 2011. Bakalářská práce. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. Vedoucí práce Ing. Pavel Pokorný, Ph.D.
- [7] GRANÁT, Luděk a Hynek SECHOVSKÝ. Počítačová grafika. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1980. Knihovnice výpočetní techniky.
- [8] KALENIUK, Oleksandr. Programmer's guide to homogeneous coordinates. Hackernoon community [online]. 13.5.2017 [cit. 2019-04-02]. Dostupné z: <https://hackernoon.com/programmers-guide-to-homogeneous-coordinates-73cbfd2bcc65>
- [9] Explaining Homogeneous Coordinates Projective Geometry — Tom Dalling. Home — Tom Dalling [online]. Copyright © 2009 [cit. 02.04.2019]. Dostupné z: <https://www.tomdalling.com/blog/modern-opengl/explaining-homogenous-coordinates-and-projective-geometry/>
- [10] BETEXA: zasilkova služba s.r.o. In: BETEXA [online]. Brno, 2014 [cit. 2019-04-03]. Dostupné z: <http://betexa.cz/hradek-u-nechanic-p-87699?allparam=1fold=yes>
- [11] TRKOVSKÁ, Dana. Historický vývoj geometrických transformací. Praha: Matfyzpress, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, 2015. Dějiny matematiky. ISBN 978-80-7378-289-4. Disertační práce. Matematicko-fyzikální fakulta (MFF).

- [12] MAŠATOVÁ, Zora. Barycentrické souřadnice. Praha, 2014. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce Doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.
- [13] KMÍNEK, Michal. Soubor:Kostel sv. Mikuláše na Malé Straně.JPG. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2019-04-22]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Kostel_sv._Mikul%C3%A1%C5%A1e_na_Mal%C3%A9_Stran%C4%9B.JPG
- [14] Chladicí věže. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2019-04-22]. Dostupné z: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:JETE-chladici_veze.jpg
- [15] [Http://www.papirovmodelarstvi.cz](http://www.papirovmodelarstvi.cz) [online]. Zlínsko: papirovmodelarstvi.cz, 2012 [cit. 2019-04-22]. Dostupné z: <http://www.papirovmodelarstvi.cz/phpBB3/viewtopic.php?f=56t=973view=previous>